

Tentative d'épuisement de la cohomologie d'une variété de Shimura par restriction à ses sous-variétés

N. Bergeron

Abstract

Let G be a connected semisimple group over \mathbb{Q} . Given a maximal compact subgroup $K \subset G(\mathbb{R})$ such that $X = G(\mathbb{R})/K$ is a Hermitian symmetric domain, and a convenient arithmetic subgroup $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, one constructs a (connected) Shimura variety $S = S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$. If $H \subset G$ is a connected semisimple subgroup such that $H(\mathbb{R}) \cap K$ is maximal compact, then $Y = H(\mathbb{R})/K$ is a Hermitian symmetric subdomain of X . For each $g \in G(\mathbb{Q})$ one can construct a connected Shimura variety $S(H, g) = (H(\mathbb{Q}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash Y$ and a natural holomorphic map $j_g: S(H, g) \rightarrow S$ induced by the map $H(\mathbb{A}) \rightarrow G(\mathbb{A}), h \mapsto gh$. Let us assume that G is anisotropic, which implies that S and $S(H, g)$ are compact. Then, for each positive integer k , the map j_g induces a restriction map

$$R_g: H^k(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(S(H, g), \mathbb{C}).$$

In this paper we focus on classical Hermitian domains and give explicit criterions for the injectivity of the product of the maps R_g (for g running through $G(\mathbb{Q})$) when restricted to the strongly primitive (in the sense of Vogan and Zuckerman) part of the cohomology. In the holomorphic case we recover previous results of Clozel and Venkataramana [7]. We also derive applications of our results to the proofs of new cases of the Hodge conjecture and of new results on the vanishing of the cohomology of some particular Shimura variety.

The symmetric space X is Hermitian and the quotient S is a compact Kaehler manifold. We relate for each of the different classical Hermitian domains the Vogan-Zuckerman's decomposition of the cohomology to some natural decomposition which is defined by making use of the Chern classes of some special bundles over S , namely the bundles obtained as quotients of some universal bundles over X by the action of Γ . The method used here is mainly representation-theoretic, applying Matsushima's formula. We are then reduced to linear algebra and combinatorics. Some generalizations of the Littlewood-Richardson coefficients are defined and used.

The proof of the criterion mentioned above is then a consequence of a recent result of Venkataramana [24].

Introduction

Les variétés de Shimura

Dans tout le texte on désignera par G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur \mathbb{Q} . Les adèles \mathbb{A} de \mathbb{Q} forment un anneau localement compact, dans lequel \mathbb{Q} se plonge diagonalement comme un sous-anneau. On peut considérer le groupe $G(\mathbb{A})$ des points adéliques de G , qui contient $G(\mathbb{Q})$ comme sous-groupe discret.

Nous supposons, pour simplifier et toujours dans tout le texte, que le groupe réductif G est presque simple sur \mathbb{Q} modulo son centre. Autrement dit, il n'a pas de sous-groupe distingué, non central et connexe défini sur \mathbb{Q} . Il découle de cette hypothèse que tous les facteurs simples de l'algèbre de Lie

complexe \mathfrak{g} de G (modulo son centre) sont isomorphes. Nous supposons de plus que le groupe $G(\mathbb{R})$ des points réels est le produit (avec intersection finie) d'un groupe compact et d'un groupe réel non compact qui est *presque simple* modulo son centre que l'on suppose compact. Nous noterons ce dernier groupe G^{nc} (nc signifie ici non compact).

Un *sous-groupe de congruence* de $G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de la forme $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ où K_f est un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ des points adéliques finis de G . Soit $X_G = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'espace symétrique associé au groupe G , où $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal. Nous supposons que cet espace est hermitien.

Dans cet article on étudie les quotients (compacts, puisque G est anisotrope) $\Gamma \backslash X_G$, où $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence; ces quotients s'identifient aux composantes connexes de $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K_\infty.K_f = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G(\mathbb{A}_f))/K_f$, où $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert. Précisément, désignons par G_f l'adhérence de $G(\mathbb{Q})$ dans le groupe $G(\mathbb{A}_f)$. Un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ s'écrit $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ où K_f est l'adhérence de Γ dans G_f et,

$$\Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f. \quad (1)$$

Plus exactement, on s'intéresse ici à la cohomologie à coefficients complexes ¹ $H^*(\Gamma \backslash X_G)$ de ces quotients.

Une fois donné deux sous-groupes de congruence $\Gamma' \subset \Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, on obtient un revêtement fini

$$\Gamma' \backslash X_G \rightarrow \Gamma \backslash X_G$$

qui induit un morphisme injectif

$$H^*(\Gamma' \backslash X_G) \rightarrow H^*(\Gamma \backslash X_G)$$

en cohomologie. Les groupes de cohomologies $H^*(\Gamma \backslash X_G)$ (ou $H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f)$) forment donc un système inductif indexé par les sous-groupes de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ (ou par les sous-groupes compacts ouverts $K_f \subset G_f$). En passant à la limite (inductive) on définit

$$H^*(Sh^0 G) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Gamma}} H^*(\Gamma \backslash X_G) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ K_f}} H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f). \quad (2)$$

La notation ci-dessus provient de ce que l'on appelle *variété de Shimura* l'espace topologique

$$Sh^0 G = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Gamma}} \Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f). \quad (3)$$

Cet espace est un espace topologique dont on peut considérer la cohomologie de Čech et il est démontré dans [22] que sa cohomologie coïncide avec (2). Pour ce qui nous concerne, il sera suffisant de considérer que la dénomination $H^*(Sh^0 G)$ n'est qu'une notation pour la limite inductive (2).

¹Tous les groupes de cohomologie que nous considérerons seront à coefficients complexes.

Les quotients $\Gamma \backslash X_G$ sont kaehlériens. Dans chacun des groupes $H^i(\Gamma \backslash X_G)$ pour $0 \leq i \leq \frac{d_G}{2}$, où d_G est la dimension réelle de X_G , on peut considérer la partie primitive de la cohomologie. En passant à la limite inductive cela nous définit la partie primitive des espaces de cohomologies

$$H_{\text{prim}}^i(Sh^0 G), \quad (0 \leq i \leq \frac{d_G}{2})$$

de la variété de Shimura associée.

Une question d'Arthur À la toute fin de son célèbre article [2], Arthur pose la question de la possibilité de découper les espaces $H_{\text{prim}}^i(Sh^0 G)$, ($0 \leq i \leq \frac{d_G}{2}$), en morceaux identifiés à des sous-espaces de la cohomologie primitive en degré médian $H_{\text{prim}}^{d_H/2}(Sh^0 H)$, attachée à des variétés de Shimura $Sh^0 H$ de dimension d_H plus petite que d_G .

Cette belle question motive une grande part de cette article. On peut penser à cette question comme à un analogue du théorème de Lefschetz pour les variétés projectives. Dans son article Arthur propose des candidats pour les variétés de Shimura $Sh^0 H$ de dimension plus petite. Les groupes H devraient être des groupes endoscopiques. Il est naturel de se demander si, comme dans le cas du théorème de Lefschetz, on ne pourrait pas épuiser une large part de la cohomologie en se restreignant à des sous-variétés de Shimura.

Restriction à une sous-variété de Shimura

Puisque X_G de type hermitien, il existe un élément c appartenant au centre de K_∞ tel que $Ad(c)$ induise (sur l'espace tangent \mathfrak{p}_0 de X_G au point base $o = eK$) la multiplication par $i = \sqrt{-1}$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^- \quad (4)$$

la décomposition associée de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G(\mathbb{R})) \otimes \mathbb{C}$, avec $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K_\infty) \otimes \mathbb{C}$. Alors $\mathfrak{p}^+ = \{X \in \mathfrak{p} : Ad(c)X = iX\}$ est l'espace tangent holomorphe à X_G au point base o .

Soit maintenant $H \subset G$ un sous-groupe réductif connexe défini sur \mathbb{Q} . On suppose que

$$H(\mathbb{R}) \cap K_\infty \text{ est un sous-groupe compact maximal de } H(\mathbb{R}). \quad (5)$$

Alors la restriction à H de l'involution de Cartan θ de G est une involution de Cartan de $H(\mathbb{R})$. On a une décomposition correspondante

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H \quad (6)$$

avec $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$. On suppose de plus

$$\mathfrak{p}_H \text{ est stable sous l'action de } Ad(c). \quad (7)$$

Alors $Ad(c)$ définit une structure complexe $(H(\mathbb{R}) \cap K_\infty)$ -invariante sur $\mathfrak{p}_{H,0}$. L'espace $X_H = H(\mathbb{R})/(H(\mathbb{R}) \cap K_\infty)$ est symétrique hermitien. On a une décomposition triangulaire

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H^+ \oplus \mathfrak{p}_H^- \quad (8)$$

compatible avec (4). Enfin, le plongement $X_H \hookrightarrow X_G$ est holomorphe.

Considérons maintenant $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ un sous-groupe de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Le quotient $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X_G$ est une variété kaehlérienne qui s'identifie à $S(K_f) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f) / K_f$.

Soit $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert. Si $K_f^H \subset K_f$, il existe une application naturelle $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$. Puisque Γ est sans torsion, l'application j est finie et non ramifiée. On rappelle le résultat suivant, dû à Deligne [8].

Lemme 1 *Étant donné $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$, il existe un sous-groupe compact ouvert $K_f^1 \subset G(\mathbb{A}_f)$ avec $K_f^H \subset K_f^1$, tel que l'application naturelle $j' : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f^1)$ soit injective.*

En particulier, si l'on prend $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}_f)$, on obtient une application naturelle finie $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$. Si l'on remplace K_f par un sous-groupe suffisamment petit K_f^1 , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(K_f^H) & \xrightarrow{j'} & S(K_f^1) \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & S(K_f), \end{array} \quad (9)$$

où π est la projection naturelle de revêtement et j' est injective.

En passant à la limite (inductive) sur les K_f , les applications j induisent l'application de restriction

$$\text{res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow H^*(Sh^0 H). \quad (10)$$

Nous dirons que $Sh^0 H$ est une *sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$* , ce que l'on notera $Sh^0 H \subset Sh^0 G$.

Nous aurons besoin de considérer également la stabilisation de cette application de restriction. Expliquons ce que cela signifie. Soit $g \in G(\mathbb{Q})$. Fixons K_f^H un compact ouvert de $H(\mathbb{A}_f)$, et considérons l'application $j_g : X_H \times H_f \rightarrow X_G \times G_f$ donnée par $j_g(x, h) = (gx, gh)$. Il est facile de vérifier que j_g induit une application injective $H(\mathbb{Q}) \backslash (X_H \times H_f) / K_f^H \rightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f) / K_f^H$. En supposant que $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}) \subset K_f$ (où K_f est un sous-groupe compact ouvert dans $G(\mathbb{A}_f)$), on obtient alors une application naturelle $j_g : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$, en utilisant les notations précédentes. Cette application est finie et non ramifiée. On peut également décrire j_g comme l'application naturelle $(H(\mathbb{R}) \cap g^{-1} \Gamma g) \backslash X_H \rightarrow \Gamma \backslash X_G$. On obtient de cette manière toute une famille, paramétrée par $g \in G(\mathbb{Q})$, de sous-variétés complexes de $\Gamma \backslash X_G$ - les images des applications j_g . En cohomologie celles-ci induisent l'application de *restriction stable*

$$H^*(S(\Gamma)) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(S_H(g)),$$

où $S_H(g) = (H(\mathbb{R}) \cap g^{-1} \Gamma g) \backslash X_H$, et l'application de restriction est déduite de la famille d'applications (j_g) . En passant à la limite (inductive) sur les Γ , l'application de restriction stable induit l'application Res_H^G *stabilisation* de res_H^G :

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H). \quad (11)$$

Résultats de Venkataramana concernant la restriction et la question d'Arthur Dans [24], Venkataramana démontre le théorème suivant ².

Théorème 2 *Supposons que $H \subset G$ soient deux groupes algébriques réductifs connexes et anisotropes sur \mathbb{Q} avec $G^{\text{nc}} = U(n, 1)$ (resp. $G^{\text{nc}} = O(2, n)$) et $H^{\text{nc}} = U(n - 1, 1)$ (resp. $H^{\text{nc}} = O(2, n - 1)$). Alors,*

$$\text{Res}_H^G : H^k(\text{Sh}^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(\text{Sh}^0 H)$$

est injective pour tout $k \leq n - 1$.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant qui répond à la question d'Arthur dans le cas des groupes G algébriques réductifs connexes sur \mathbb{Q} avec $G^{\text{nc}} = U(n, 1)$ ou $G^{\text{nc}} = O(2, n)$ et provenant, par restriction des scalaires, d'un groupe unitaire ou orthogonal sur un corps de nombre.

Corollaire 3 *Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire (resp. orthogonal) anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(n, 1)$ (resp. $O(2, n)$). Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, pour tout entier naturel $k \leq n$, il existe une sous-variété de Shimura $\text{Sh}^0 H \subset \text{Sh}^0 G$ de dimension complexe k telle que la restriction stable*

$$\text{Res}_H^G : H^k(\text{Sh}^0 G) \rightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(\text{Sh}^0 H)$$

soit injective. De plus, l'image de la partie primitive de $H^k(\text{Sh}^0 G)$ est envoyée dans la partie primitive de la cohomologie (de degré médian) de $\text{Sh}^0 H$.

Les groupes G algébriques réductifs connexes sur \mathbb{Q} avec $G^{\text{nc}} \cong U(n, 1)$ à l'opposée de ceux considérés dans le corollaire sont les groupes qui ont la propriété (K) de [6]. Il serait intéressant de voir si les techniques de [6] jointes au théorème 2 permettent de répondre positivement à la question d'Arthur en toute généralité pour les groupe unitaires de partie non compacte isomorphe à $U(n, 1)$.

La démonstration du théorème 2 repose sur un beau résultat général également dû à Venkataramana [24] donnant un critère d'injectivité de l'application de restriction stable en restriction à certains sous-espaces. Il s'agit ensuite de comprendre ce critère ce qui nous ramène essentiellement à de l'algèbre linéaire, facile dans le cas des groupes $U(n, 1)$ et $O(2, n)$. Le but de ce texte est de comprendre ce critère dans le cas des domaines hermitiens classiques. C'est exactement ce que font Clozel et Venkataramana dans [7] dans le cas de la cohomologie holomorphe. Nous retrouverons donc leurs résultats, notons au passage que nos arguments sont purement locaux alors que ceux de Clozel et Venkataramana font intervenir des phénomènes globaux.

²Remarquons que le cas de la cohomologie holomorphe était déjà traité dans des travaux antérieurs de Oda [18] et de Clozel et Venkataramana [7]. Enfin, l'énoncé général de ce théorème était conjecturé par Harris et Li dans [11] où des cas particuliers sont démontrés.

Dans ce qui suit, $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices avec m lignes et n colonnes et des coefficients complexes. Nous noterons $E_{i,j} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ la matrice dont le coefficient appartenant à la i -ème ligne et à la j -ème colonne est égal à 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. Le groupe des matrices carrées $p \times p$ inversibles est noté GL_p . Le groupe des matrices unitaires $p \times p$ est noté $U(p)$.

Si E est une représentation d'un groupe, nous noterons E^* sa représentation contragrédiente. Si e_1, e_2, \dots, e_m est une base de E , alors sa base duale de E^* est notée $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$. La r -ième puissance extérieure (resp. symétrique) de E est désignée $\bigwedge^r E$ (resp. $\text{sym}^r(E)$).

Nous allons nous intéresser tour à tour aux différents domaines hermitiens classiques en excluant le cas $G^{\text{nc}} = O(2, n)$ déjà traité dans [24]. Le cas où $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ est le plus intéressant. Il nous occupera une bonne partie de l'article. Remarquons immédiatement que même lorsque G est un \mathbb{Q} -groupe provenant d'un groupe unitaire sur un corps de nombre on ne peut espérer répondre positivement à la question d'Arthur seulement à coup de restrictions (stables) à des sous-variétés de Shimura. Le premier à l'avoir remarqué est Venkataramana dans [25], on rencontrera dans le cours du texte des contrexemples similaires. Une grande partie de cet article est motivée par la volonté de comprendre quelle partie de la cohomologie des variétés de Shimura unitaires peut être épuiser à coup de restrictions (stables) à des sous-variétés de Shimura.

Énoncés des principaux résultats

Concernant la question d'Arthur, nos résultats nous permettrons de démontrer le théorème suivant qui généralise le corollaire 3 dans le cas unitaire.

Théorème 4 *Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(p, q)$ avec $1 \leq p \leq q$. Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, pour tout entier naturel $k < 3p - 2$ si $p = q$ et $< p + q - 1$ si $p < q$, l'espace $H^k(Sh^0 G)$ se décompose en une somme directe finie de sous-espaces telle que chacun de ces sous-espaces s'injecte naturellement dans la cohomologie d'une variété de Shimura de dimension strictement plus petite que pq .*

Nous verrons de plus que les degrés $3p - 2$ et $p + q - 1$ sont optimaux si l'on suppose $Sh^0 H \subset Sh^0 G$.

Dans le cas des groupes $GS p_p$ et $O^*(2p)$ nos méthodes n'apportent pas, concernant la question d'Arthur, beaucoup plus que les résultats de Clozel et Venkataramana que nous retrouverons. Nous verrons au cours du texte, qu'ils permettent néanmoins de préciser l'action des classes de Chern sur la cohomologie.

Revenons maintenant au cas des variétés de Shimura unitaires, i.e $G^{\text{nc}} = U(p, q)$. Le théorème de Lefschetz sur les classes de Hodge de bidegré $(1, 1)$ est non vide lorsque $p = 1$ et implique que toute classe de Hodge dans $H^2(Sh^0 G)$ et donc dans $H^{2q-2}(Sh^0 G)$ est algébrique. Lorsque $q \geq p > 1$, il n'y a pas de classes de Hodge de degré 2, en fait et si $q > p + 1$ nous verrons que toute classe de Hodge non triviale est de degré $\geq 2p$. En développant une idée de Venkataramana, nous montrerons le nouveau cas suivant de la conjecture de Hodge.

Théorème 5 Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(p, q)$ avec $3 \leq 2p + 1 \leq q$. Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, toute classe de Hodge dans $H^{2p(q-1)}(Sh^0 G)$ est algébrique.

Enfin, nous démontrerons le résultat d'annulation suivant.

Théorème 6 Supposons que $Sh^0 G$ contienne une sous-variété de Shimura $Sh^0 H$, avec H obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe $U(D)$ où D est une algèbre à division de degré premier impair sur une extension quadratique imaginaire d'un corps de nombre totalement réel et tel que $H^{nc} = U(p, b)$ avec $b < q$. Alors, $H_{\text{prim}}^k(Sh^0 G) = 0$ pour tout entier $1 \leq k < \min(bp, q)$.

Plan de l'article

La première partie de l'article est consacrée au groupe $U(p, q)$. Dans une première section, nous étudions la cohomologie des variétés de Shimura unitaires à l'aide des travaux de Vogan et Zuckerman mais en adoptant une paramétrisation par des couples de partitions. Cette paramétrisation permet de comprendre relativement facilement l'action des classes de Chern sur la cohomologie. Le résultat principal de cette section est la proposition 11; il décrit complètement cette action. Nous appliquons à la toute fin de la première section ces idées à la démonstration d'un théorème généralisant le théorème de Lefschetz fort. Dans le cas holomorphe ce théorème n'est pas nouveau il est l'objet de l'article [20] de Parthasarathy.

Dans une deuxième section, nous classifions les types de sous-espaces hermitiens symétriques pouvant apparaître comme sous-variété totalement géodésique de X_G . Puis nous calculons la classe de cohomologie correspondante à chacun de ces sous-espaces dans le dual compact de X_G .

Les résultats des deux premières sections nous permettent à l'aide du théorème principal de l'article [24] de Venkataramana de démontrer des critères d'injectivité de l'application de restriction stable. On déduit de ces critères le théorème 4.

Les deux dernières parties (plus courtes) traitent respectivement des cas du groupe GSp_p et du groupe $O^*(2p)$. Nous y démontrons les résultats correspondant.

Concluons en remarquant que nos méthodes ne s'étendent pas au cas non isotropes (*i.e.* $S(\Gamma)$ non compacte). Mais il est naturel de penser que les résultats devraient eux s'étendre (en considérant cette fois la cohomologie L^2). Nous le montrons partiellement dans un travail en préparation. Enfin, nous laissons au lecteur le soin de traduire nos résultats au cas des systèmes de coefficients non triviaux, les démonstrations se transposent immédiatement.

Remerciements Je ne saurais trop souligner ce que les résultats ci-dessus doivent aux travaux de Venkataramana. La lecture de ceux de ses articles figurant dans la bibliographie m'a incité à vouloir comprendre la combinatoire de l'application de restriction stable entre variétés de Shimura. Enfin, j'ai bénéficié de nombreuses conversations sur ce sujet avec Laurent Clozel, je l'en remercie.

1 Cas des variétés de Shimura unitaires

Dans toute cette partie G est un groupe algébrique réductif connexe et anisotrope sur \mathbb{Q} avec $G^{\text{nc}} \cong U(p, q)$, où p et q sont des entiers strictement positifs avec $p \leq q$. Le rang réel de G est donc p . On a

$$G^{\text{nc}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : {}^t\overline{g} \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\}, \quad (12)$$

où $A \in M_{p \times p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{q \times p}(\mathbb{C})$ et $D \in M_{q \times q}(\mathbb{C})$. Soit

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G^{\text{nc}} : A \in U(p), D \in U(q) \right\}.$$

Le complexifié $K_{\mathbb{C}}$ de K est le groupe

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}} : A \in GL_p, D \in GL_q \right\}.$$

L'involution de Cartan θ est donnée par $x \mapsto -{}^t\overline{x}$. Soit

$$T = \left\{ g \in K_{\mathbb{C}} : g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, D \text{ matrices diagonales} \right\}.$$

Puisque les facteurs compact de $G(\mathbb{R})$ ne nous intéresseront pas, nous noterons \mathfrak{g}_0 l'algèbre de Lie de G^{nc} et \mathfrak{k}_0 l'algèbre de Lie de K . Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan associée. Si \mathfrak{l}_0 est une algèbre de Lie, nous noterons $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$ sa complexification. Rappelons que la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ induit une décomposition

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-.$$

Nous noterons $(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$ les éléments de T ou de son algèbre de Lie. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est bien évidemment $M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{C})$, et l'on voit ses éléments sous forme de blocs comme dans (12). On a alors,

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{q \times p}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit $E = \mathbb{C}^p$ (resp. $F = \mathbb{C}^q$) la représentation standard de $U(p)$ (resp. $U(q)$). Alors, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$.

Soient (e_1, \dots, e_p) et (f_1, \dots, f_q) les bases canoniques respectives de E et F . Choisissons comme sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}_K dans \mathfrak{k} l'algèbre des matrices dans \mathfrak{k} , qui sont triangulaires supérieures sur E et triangulaires inférieures sur F par rapport à ces bases. Alors l'ensemble des racines simples compactes positives

$$\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{l}) = \{x_i - x_j : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{y_j - y_i : 1 \leq i < j \leq q\}. \quad (13)$$

Les racines de T apparaissant dans \mathfrak{p}^+ sont les formes linéaires $x_i - y_j$ avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$.

1.1 Décomposition “à la Lefschetz” de la cohomologie

Puisque G est anisotrope sur \mathbb{Q} , un théorème de Borel et Harish-Chandra [3] affirme que si Γ est un sous-groupe de congruence de G , la variété $S(\Gamma)$ est compacte.

Soit Γ un sous-groupe de congruence de G . Soit $\mathcal{E}^k(S(\Gamma))$ l'espace des formes différentielles de degré k sur $S(\Gamma)$. Puisque le fibré cotangent $T^*S(\Gamma)$ est isomorphe au fibré $\Gamma \backslash G^{\text{nc}} \times_K \mathfrak{p}^* \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}}/K = S(\Gamma)$, qui est associé au K -fibré principal $K \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}} \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}}/K$ et la représentation (réelle) de K dans \mathfrak{p}^+ donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & ABD^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\mathcal{E}^k(S(\Gamma)) \simeq (C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}}) \otimes \bigwedge^k \mathfrak{p}^*) \simeq \text{Hom}_K(\bigwedge^k \mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (14)$$

Notons Δ le laplacien de Hodge-de Rham sur la variété riemannienne (localement symétrique) $S(\Gamma)$ (où la métrique est déduite de la forme de Killing sur \mathfrak{g}_0). L'espace des formes harmoniques de degré k est donné par

$$\mathcal{H}^k(S(\Gamma)) := \{\omega \in \mathcal{E}^k(S(\Gamma)) : \Delta\omega = 0\}.$$

La théorie de Hodge fournit un isomorphisme naturel

$$H^*(S(\Gamma)) \simeq \mathcal{H}^*(S(\Gamma)).$$

Soit (π, V_π) un (\mathfrak{g}, K) -module irréductible. À l'aide de (14) on définit une application linéaire

$$T_\pi : \begin{cases} \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \otimes \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})) & \rightarrow \mathcal{E}^*(S(\Gamma)), \\ \psi \otimes \varphi & \mapsto \varphi \circ \psi. \end{cases} \quad (15)$$

Soit \hat{G}^{nc} l'ensemble des classes d'équivalence des (\mathfrak{g}, K) -modules irréductibles qui sont unitarisables. Rappelons qu'Harish-Chandra a démontré que \hat{G}^{nc} s'identifie naturellement au dual unitaire de G^{nc} . Soient $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} , $Z(\mathfrak{g})$ son centre et $\Omega \in Z(\mathfrak{g})$ le casimir défini par la forme de Killing sur \mathfrak{g}_0 . On définit le sous-ensemble \hat{G}_0^{nc} de \hat{G}^{nc} par

$$\hat{G}_0^{\text{nc}} := \{\pi \in \hat{G}^{\text{nc}} : \pi(\Omega) = 0\},$$

où l'on a conservé la même notation π pour la représentation de $U(\mathfrak{g})$.

L'action de G^{nc} sur X_G induit la représentation de $U(\mathfrak{g})$ sur l'espace des formes différentielles sur X_G . En particulier, le casimir $\Omega \in Z(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathcal{E}^*(X_G)$ comme le laplacien de Hodge-de Rham, puisque la métrique riemannienne sur X_G est induite par la forme de Killing sur \mathfrak{g}_0 . Il découle de tout ceci que

$$\text{Image}(T_\pi) \subset \mathcal{H}^*(S(\Gamma)) \simeq H^*(S(\Gamma)) \quad (16)$$

si et seulement si $\pi \in \hat{G}_0^{\text{nc}}$. On dit dans ce cas que le sous-espace de $H^*(S(\Gamma))$ correspondant à l'image de T_π est la π -composante, et on écrit $H^*(\pi : \Gamma)$. Autrement dit,

$$H^k(\pi : \Gamma) := \text{Image}(T_\pi) \cap H^k(S(\Gamma)) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (17)$$

via l'isomorphisme (16).

Un résultat dû à Gel'fand et Piatetski-Shapiro [10] affirme que la représentation régulière droite dans $L^2(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})$ admet une décomposition en somme directe de Hilbert discrète

$$L^2(\Gamma \backslash G^{\text{nc}}) \simeq \sum^{\oplus} \text{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})) \otimes \pi = \sum^{\oplus} n_{\Gamma}(\pi) \pi,$$

où π parcourt cette fois le dual unitaire de G^{nc} et la multiplicité

$$n_{\Gamma}(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})) < \infty.$$

Alors la formule de Matsushima est résumée dans le lemme suivant.

Lemme 7 ([4], [17]) *Sous les notations précédentes. On a*

$$H^*(\pi : \Gamma) \simeq n_{\Gamma} H^*(\mathfrak{g}, K; \pi), \quad (18)$$

$$H^*(S(\Gamma)) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}_0^{\text{nc}}} H^*(\pi : \Gamma). \quad (19)$$

En passant à la limite (inductive) sur les sous-groupes de congruence $\Gamma \subset G$, nous parlerons de π -composante de la cohomologie $H^*(Sh^0 G)$ de la variété de Shimura $Sh^0 G$, ce que nous noterons $H^*(\pi : Sh^0 G)$. La décomposition (19) se traduit alors en

$$H^*(Sh^0 G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}_0^{\text{nc}}} H^*(\pi : Sh^0 G). \quad (20)$$

D'après Parthasarathy [19], Kumaresan [14] et Vogan-Zuckerman [27], les (\mathfrak{g}, K) -modules unitarisables ayant des groupes de (\mathfrak{g}, K) -cohomologie non triviaux peuvent être décrit comme suit. Notons toujours $\mathfrak{t}_0 = \text{Lie}(T)$ une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{t}_0 . On considère les sous-algèbres paraboliques θ -stable $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g} : \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ [27], où \mathfrak{l} est le centralisateur d'un élément $X \in i\mathfrak{t}_0$ et \mathfrak{u} est le sous-espace engendré par les racines positives de X dans \mathfrak{g} . Alors \mathfrak{q} est stable sous θ ; on en déduit une décomposition $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Soit $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$.

Associé à \mathfrak{q} , se trouve un (\mathfrak{g}, K) -module irréductible bien défini $A_{\mathfrak{q}}$ caractérisé par les propriétés suivantes. Supposons effectué un choix de racines positives pour $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ de façon compatible avec \mathfrak{u} . Soit $e(\mathfrak{q})$ un générateur de la droite $\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Alors $e(\mathfrak{q})$ est le vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible $V(\mathfrak{q})$ de K contenue dans $\bigwedge^R \mathfrak{p}$; et dont le plus haut poids est donc nécessairement $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. La classe d'équivalence du (\mathfrak{g}, K) -module $A_{\mathfrak{q}}$ est alors uniquement caractérisée par les deux propriétés suivantes.

$$A_{\mathfrak{q}} \text{ est unitarisable avec le même caractère infinitésimal que la représentation triviale} \quad (21)$$

$$\text{Hom}_K(V(\mathfrak{q}), A_{\mathfrak{q}}) \neq 0. \quad (22)$$

Remarquons que la classe du module $A_{\mathfrak{q}}$ ne dépend alors en fait que de l'intersection $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, autrement dit deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{u}'$ vérifiant $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}$ donnent lieu à une même classe de module cohomologique.

De plus, $V(\mathfrak{q})$ intervient avec multiplicité 1 dans $A_{\mathfrak{q}}$ et $\bigwedge^R(\mathfrak{p})$, et

$$H^i(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}}) \cong \text{Hom}_{L \cap K}(\bigwedge^{i-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C}). \quad (23)$$

Ici L est un sous-groupe de K d'algèbre de Lie \mathfrak{l} .

Si Γ est un sous-groupe de congruence de G , la $A_{\mathfrak{q}}$ -composante $H^R(A_{\mathfrak{q}} : \Gamma)$ de $H^R(S(\Gamma))$ sera dite *fortement primitive*. D'après ce que nous avons rappelé ci-dessus la $A_{\mathfrak{q}}$ -composante fortement primitive est donc la somme sur une base $\{\varphi\}$ de $\text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(A_{\mathfrak{q}}, C^\infty(\Gamma \backslash G^{nc}))$ des formes différentielles ω_φ définies par

$$\omega_\varphi(g.\lambda) = \varphi(\omega(\lambda))(g) \quad (\lambda \in \bigwedge^R \mathfrak{p}, g \in G^{nc}),$$

où $\omega : \bigwedge^R \mathfrak{p} \rightarrow A_{\mathfrak{q}}$ est une K -application non nulle (uniquement définie à un scalaire près) qui factorise nécessairement via la composante isotypique $V(\mathfrak{q})$. De même nous parlerons de $H^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G)$ comme de la $A_{\mathfrak{q}}$ -composante *fortement primitive*.

Modules cohomologiques et diagrammes de Young

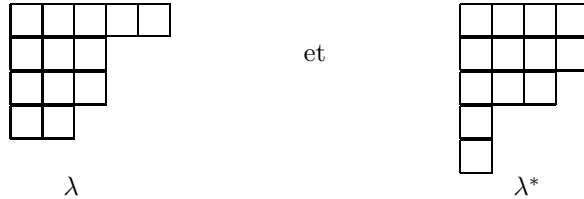
Nous avons vu comment associer une sous-algèbre parabolique θ -stable \mathfrak{q} à un élément $X = (x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) \in \mathfrak{it}_0$ (les x_i, y_j sont donc tous réels). Rappelons le choix fixé (13) de racines simples compactes positives. Après conjugaison par un élément de K , on peut supposer, et nous le supposons effectivement par la suite, que X est dominant par rapport à $\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$, *i.e.* que $\alpha(X) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$; il satisfait alors aux inégalités

$$x_1 \geq \dots \geq x_p \text{ et } y_q \geq \dots \geq y_1.$$

Nous allons maintenant associer à X un couple de diagrammes de Young (ou, suivant la littérature, diagrammes de Ferrers), qui coderont complètement le module cohomologique associé. Rappelons qu'une *partition* est une suite décroissante λ d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$. Les entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont des *parts*. La *longueur* $l(\lambda)$ désigne le nombre de parts non nulles, et le *poids* $|\lambda|$, la somme des parts. On se soucie peu, d'ordinaire, des parts nulles : on se permet en particulier, le cas échéant, d'en rajouter ou d'en ôter

Le *diagramme de Young* de λ , que l'on notera également λ , s'obtient en superposant, de haut en bas, des lignes dont l'extrémité gauche est sur une même colonne, et de longueurs données par les parts de λ . Par symétrie diagonale, on obtient le diagramme de Young de la *partition conjuguée*, que l'on notera λ^* .

Le diagramme de Young de la partition $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ et de sa conjugué sont donc :



Soient λ et μ deux partitions telles que μ contienne λ , ce que nous noterons $\lambda \subset \mu$. Notons μ/λ le complémentaire du diagramme de λ dans celui de μ : c'est une *partition gauche* son diagramme est un *diagramme gauche*. Dans la pratique les partitions λ que nous rencontrerons seront incluses dans la *partition rectangulaire* $p \times q = \underbrace{(q, \dots, q)}_{p \text{ fois}}$, le diagramme gauche $p \times q/\lambda$ est alors le

diagramme de Young d'une partition auquel on a appliqué une rotation d'angle π ; nous noterons $\hat{\lambda}$ cette partition, la *partition complémentaire* de λ dans $p \times q$. Par exemple, la partition $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ est incluse dans le rectangle 5×5 , et dans ce rectangle, $\hat{\lambda} = (5, 3, 2, 2)$.

Nous associons maintenant à notre élément $X \in \mathfrak{it}_0$ un couple (λ, μ) de partitions comme suit.

- La partition $\lambda \subset p \times q$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times q$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i > y_j$.
- La partition $\mu \subset p \times q$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times q$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i \geq y_j$.

Le lemme suivant est absolument immédiat.

Lemme 8 *Le couple de partitions (λ, μ) associé à un élément $X \in \mathfrak{it}_0$ vérifie :*

1. *la suite d'inclusion $\lambda \subset \mu \subset p \times q$, et*
2. *que le diagramme gauche μ/λ est une réunion de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$, $i = 1, \dots, m$ ne s'intersectant qu'en des sommets.*

Réciproquement, étant donné un couple de partitions (λ, μ) vérifiant 1 et 2, on peut toujours trouver un élément $X \in \mathfrak{it}_0$ tel que (λ, μ) soit le couple de partitions associé à X .

Nous dirons d'un couple de partitions (λ, μ) qu'il est *compatible* (ou *compatible dans $p \times q$* en cas d'ambiguïté) s'il vérifie les points 1 et 2 du lemme 8.

Remarquons maintenant que si X et X' sont deux éléments de \mathfrak{it}_0 de même couple de partitions associé (λ, μ) et de sous-algèbres paraboliques associées respectives \mathfrak{q} et \mathfrak{q}' alors $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{u}'$. On déduit donc de la remarque suivant la définition des modules $A_{\mathfrak{q}}$ et du lemme 8 que chaque couple compatible de partitions (λ, μ) définit sans ambiguïté une classe d'équivalence de (\mathfrak{g}, K) -modules que nous noterons $A(\lambda, \mu)$. Nous nous autoriserons à parler de "la" sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}(\lambda, \mu) = \mathfrak{l}(\lambda, \mu) \oplus \mathfrak{u}(\lambda, \mu)$ de (\mathfrak{g}, K) -module associé $A(\lambda, \mu)$, l'important pour nous est qu'une telle sous-algèbre existe (d'après le lemme 8). Nous supposerons de plus, ce que l'on peut toujours faire, que le groupe $L(\lambda, \mu)$ associé à la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}(\lambda, \mu)$ n'a pas de facteurs compacts non abélien. Il est alors facile de voir que

$$L(\lambda, \mu)/(L(\lambda, \mu) \cap K) = \prod_{i=1}^m U(p_i, q_i)/U(p_i) \times U(q_i). \quad (24)$$

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman mentionnés plus haut affirment alors que

$$\hat{G}_{\text{VZ}}^{\text{nc}} := \{A(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions}\} \subset \hat{G}_0^{\text{nc}} \subset \hat{G}^{\text{nc}}$$

est l'ensemble des (\mathfrak{g}, K) -modules ayant des groupes de (\mathfrak{g}, K) -cohomologie non nuls.

Comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$ et $\mathfrak{p} = (E \otimes F^*) \oplus (E \otimes F^*)^*$. Il est bien connu (cf. [9]) qu'à chaque partition λ , il correspond une représentation irréductible E^λ de $GL(E)$.

Considérons la représentation de $K_{\mathbb{C}}$

$$V(\lambda) := E^\lambda \otimes (F^{\lambda^*})^*. \quad (25)$$

C'est une sous-représentation irréductible de $\bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*)$; son vecteur de plus haut poids est

$$v(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_i \otimes f_j^* \quad (26)$$

et son vecteur de plus bas poids est

$$w(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_{p-i+1} \otimes f_{q-j+1}^*. \quad (27)$$

On peut montrer, cf. [9], que la représentation

$$\bigwedge \mathfrak{p}^+ = \bigwedge (E \otimes F^*) = \bigoplus_{\lambda \subset p \times q} V(\lambda), \quad (28)$$

où chaque sous-espace irréductible $V(\lambda)$ apparaît avec multiplicité un.

Soit maintenant (λ, μ) un couple compatible de partitions. Le vecteur

$$v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* \in \bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*) \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|}(E \otimes F^*)^* = \bigwedge^{|\lambda|, |\hat{\mu}|} \mathfrak{p} \subset \bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|} \mathfrak{p} \quad (29)$$

est un vecteur de plus haut poids $2\rho(u(\lambda, \mu) \cap \mathfrak{p})$ et engendre donc sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$ un sous-module irréductible que l'on note $V(\lambda, \mu)$. Ce module est isomorphe à $V(\mathfrak{q}(\lambda, \mu))$.

Classes de Chern et diagrammes de Young

Soit $\mathbb{G}_{p,q}$ la grassmannienne des sous-espaces complexes de dimension p dans \mathbb{C}^{p+q} . Soit $x_0 \in \mathbb{G}_{p,q}$ le point base correspondant au sous-espace complexe de dimension p constitué des vecteurs de \mathbb{C}^{p+q} dont les q dernières coordonnées sont toutes nulles. Le groupe $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ agit naturellement sur $\mathbb{G}_{p,q}$ et l'orbite $U(p, q).x_0$ s'identifie à l'espace symétrique hermitien X_G .

Cette construction se comprend plus généralement de la façon suivante. Soit $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ le complexifié du groupe G^{nc} . Soit $P_{\mathbb{C}}^-$ le sous-groupe parabolique de $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k}$. Alors, le *dual compact* $\hat{X}_G = G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}/P_{\mathbb{C}}^-$ de X_G est

également un espace symétrique hermitien et l'inclusion $G^{\text{nc}}/K = G^{\text{mc}}/G^{\text{nc}} \cap P_{\mathbb{C}}^- \subset G_{\mathbb{C}}^{\text{mc}}/P_{\mathbb{C}}^-$ réalise X_G comme un domaine borné dans \hat{X}_G . Dans notre cas \hat{X}_G s'identifie à la grassmannienne $\mathbb{G}_{p,q}$ et on retrouve le plongement décrit au précédent paragraphe. Remarquons que si l'on introduit la sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ de \mathfrak{g} et G_u^{mc} le sous-groupe (compact malgré le nc) de $G_{\mathbb{C}}^{\text{mc}}$ d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_u , alors $\hat{X}_G = G_u^{\text{mc}}/K$.

On dispose sur la grassmannienne $\mathbb{G}_{p,q}$ d'un *fibré tautologique* \hat{T} de rang p , dont la fibre au-dessus d'un sous-espace W de \mathbb{C}^{p+q} est W lui-même. De façon analogue, le *fibré quotient* \hat{Q} , de rang q , a pour fibre au-dessus de W le quotient \mathbb{C}^{p+q}/W .

Soit Γ un sous-groupe de congruence de G . Le groupe $GL(p+q, \mathbb{C})$ agit sur \hat{T} et \hat{Q} . Par restriction, le groupe $U(p, q)$ agit sur $\hat{T}|_{X_G}$ et sur $\hat{Q}|_{X_G}$. En quotientant par l'action de Γ sur $\hat{T}|_{X_G}$ et sur $\hat{Q}|_{X_G}$, on obtient deux fibrés sur $S(\Gamma)$ que nous noterons respectivement T et Q .

D'après un théorème classique de Cartan, l'espace $H^*(\mathbb{G}_{p,q})$ peut être identifié avec l'espace des formes différentielles $U(p+q)$ -invariantes. Soit ω une forme différentielle $U(p+q)$ -invariante sur $\mathbb{G}_{p,q}$ et soit $\bar{\omega}$ une forme différentielle $U(p, q)$ -invariante sur X_G égale à ω au point x_0 . Puisque ω est, en particulier, Γ -invariante elle induit une forme (nécessairement fermée) sur $S(\Gamma)$ qui définit donc une classe de cohomologie dans $H^*(S(\Gamma))$. On a ainsi construit une application

$$\eta : H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \rightarrow H^*(S(\Gamma)). \quad (30)$$

Il est bien connu que η est injective. Le lemme suivant est lui aussi classique, on peut en trouver une démonstration dans [20].

Lemme 9 *Si $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_p$ (resp. $\hat{C}'_1, \dots, \hat{C}'_q$) sont les classes de Chern du fibré \hat{T} (resp. \hat{Q}), alors $C_i := (-1)^i \eta(\hat{C}_i)$ (resp. $C'_i := (-1)^i \eta(\hat{C}'_i)$) est la i -ème classe de Chern du fibré T (resp. Q).*

Nous allons relier les classes de Chern \hat{C}_i et \hat{C}'_i à des sous-espaces K -invariants de $\bigwedge \mathfrak{p}$.

Remarquons d'abord qu'en utilisant (28) et son dualisé :

$$\bigwedge \mathfrak{p}^- = \bigoplus_{\lambda \subset p \times q} V(\lambda)^*,$$

on peut décrire une base $\{C_\nu : \nu \subset p \times q\}$ de l'espace $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ des vecteurs K -invariants de $\bigwedge \mathfrak{p}$ paramétrée par l'ensemble des partitions $\nu \subset p \times q$. On prend $C_\nu := \sum_l z_l \otimes z_l^*$ où $\{z_l\}$ est une base de $V(\nu) \subset \bigwedge \mathfrak{p}^+$ et $\{z_l^*\}$ la base duale de $V(\nu)^* \subset \bigwedge \mathfrak{p}^-$.

Soit $\nu \subset p \times q$ une partition. L'élément $C_\nu \in \bigwedge \mathfrak{p}$ est invariant sous l'action de K . Or le théorème de Cartan mentionné plus haut identifie $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ et $H^*(\mathbb{G}_{p,q})$. On peut donc voir C_ν comme une classe de cohomologie dans $H^*(\mathbb{G}_{p,q})$. D'après un théorème de Kostant [13, Theorem 6.15], C_ν est un multiple non nul de la classe de cohomologie associée à la sous-variété de Schubert X_ν associée à la partition $\nu \subset p \times q$.

Rappelons qu'une fois un drapeau complet fixé

$$0 = V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_{p+q} = \mathbb{C}^{p+q},$$

on associe à toute partition $\nu \subset p \times q$, la *sous-variété de Schubert*

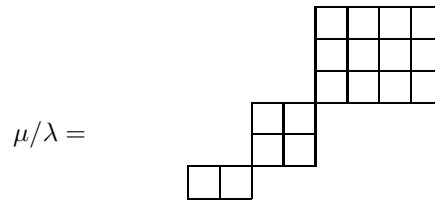
$$X_\nu = \{W \in \mathbb{G}_{p,q} : \dim(W \cap V_{n+i-\nu_i}) \geq i, 1 \leq i \leq m\}.$$

La classe de Schubert associée $[X_\nu] \in H^{2|\nu|}(\mathbb{G}_{p,q})$ ne dépend pas du choix du drapeau. D'après le théorème de Kostant cité au précédent paragraphe C_ν est un multiple non nul de $[X_\nu]$.

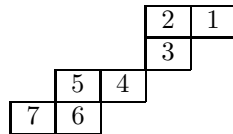
D'un autre côté, il est bien connu (cf. [9] ou [16]) que la k -ième classe de Chern \hat{C}_k (resp. \hat{C}'_k) du fibré \hat{T} (resp. \hat{Q}) sur la grassmannienne, est égale à la classe $[X_{(1^k)}]$ (resp. $[X_{(k)}]$) d'une sous-variété de Schubert associée à la partition $(1^k) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}})$ (resp. la partition dont une seule part est non nulle égale à k).

Action des classes de Chern sur la cohomologie

Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions. Rappelons que le diagramme gauche μ/λ est alors constitué de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$, $i = 1, \dots, m$ ne s'intersectant qu'en des sommets. Par exemple si $\mu = (8, 8, 8, 4, 4, 2)$ et $\lambda = (4, 4, 4, 2, 2)$,



Étant donné un diagramme gauche μ/λ , numérotions les cases de droite à gauche et de haut en bas; nous appellerons cet étiquetage le *numérotage inverse* du diagramme gauche. Par exemple, le numérotage inverse de $(5, 4, 3, 2)/(3, 3, 1)$ est



Nous appellerons *sous-diagramme gauche* d'un diagramme gauche μ/λ , tout diagramme μ'/λ où μ' est le diagramme d'une partition vérifiant $\lambda \subset \mu' \subset \mu$. On peut alors donner les définitions suivantes qui seront fondamentales dans la suite du texte.

Définitions

- Nous dirons d'une partition $\nu \subset p \times q$ qu'elle est une *image* d'un diagramme gauche μ/λ s'il existe une bijection entre les cases des diagrammes ν et μ/λ telle que si une case A est au-dessus (au sens large) et à gauche (au sens large) d'une case B dans l'un des diagrammes, les cases correspondantes A' et B' de l'autre diagramme sont dans l'ordre du numérotage inverse.

- Nous dirons ensuite d'une partition $\nu \subset p \times q$ qu'elle peut *s'inscrire* dans un diagramme gauche μ/λ si elle est une image d'un sous-diagramme gauche de μ/λ .

Nous allons maintenant tenter de donner plus de sens à ces définitions. Commençons par dire qu'elles sont reliées aux nombres de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\nu}^\mu$. Nous renvoyons au livre de Fulton [9] pour un grand nombre de définitions de ces nombres. En ce qui nous concerne, remarquons immédiatement que la notion d'image définie ci-dessus est due à Zelevinsky [28] qui montre notamment que $c_{\lambda\nu}^\mu$ est égal au nombre d'images entre ν et μ/λ ³.

Nous aurons besoin d'utiliser plusieurs caractérisations différentes des nombres de Littlewood-Richardson. Rappelons qu'un *tableau de Young* T est le remplissage des cases d'un diagramme de Young μ par des entiers ≥ 1 de manière

1. croissante (au sens large) le long des lignes (de gauche à droite), et
2. strictement croissante de haut en bas suivant chaque colonne.

Étant donné une partition λ , nous noterons $U(\lambda)$ le tableau de Young obtenu à partir du diagramme λ en remplissant toutes les cases de la i -ème ligne par des i . Nous parlerons également de *tableaux gauches*, *i.e.* de tableaux sur des diagrammes gauches. Nous admettrons dans cette sous-section que le lecteur est familier avec le produit \cdot de deux tableaux de Young ou la rectification Rect d'un tableau gauche. Rappelons alors que le nombre de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\nu}^\mu$ est égal

1. au nombre de tableaux T sur λ tels que $T \cdot U(\nu) = U(\mu)$;
2. au nombre de tableaux gauches S sur μ/λ tels que $\text{Rect}(S) = U(\nu)$.

Étant donné un couple compatible (λ, μ) de partitions, le diagramme gauche μ/λ est réunion de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$, $i = 1, \dots, m$. Si pour chaque entier i entre 1 et m on choisit un diagramme $\alpha_i \subset p_i \times q_i$, on peut former un sous-diagramme gauche $\alpha_1 * \dots * \alpha_m$ de μ/λ en plaçant les diagrammes α_i dans le coin supérieur gauche de chacun des diagrammes $p_i \times q_i$. On notera (de manière cohérente avec la notation des nombres de Littlewood-Richardson) $c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\nu$ les nombres d'images entre ν et le diagramme gauche $\alpha_1 * \dots * \alpha_m$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 10 *Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions tel que $\mu/\lambda = \bigcup_{i=1}^m p_i \times q_i$. Notons $P_i = p_{i+1} + \dots + p_m$ et $Q_i = q_{i+1} + \dots + q_m$. Soit ν une partition.*

1. On a

$$c_{\lambda\nu}^\mu = \sum_{\substack{\beta_i \subset P_i \times Q_i \\ i=1, \dots, m-2}} \prod_{i=1}^{m-1} c_{p_i \times q_i \beta_i}^{\beta_{i-1}},$$

où on a noté $\beta_0 = \nu$ et $\beta_{m-1} = p_m \times q_m$.

³Ici le couple de partitions (λ, μ) n'a pas besoin d'être nécessairement compatible.

2. Le diagramme ν s'inscrit dans μ/λ si et seulement s'il existe des diagrammes $\alpha_i \subset p_i \times q_i$, pour $i = 1, \dots, m$ tel que $c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\nu \neq 0$. Et

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\nu = \sum_{\substack{\beta_i \subset P_i \times Q_i \\ i = 1, \dots, m-2}} \prod_{i=1}^{m-1} c_{\alpha_i \beta_i}^{\beta_{i-1}}, \quad (31)$$

où on a noté $\beta_0 = \nu$ et $\beta_{m-1} = \alpha_m$.

Démonstration. Fixons des diagrammes $\alpha_i \subset p_i \times q_i$, pour $i = 1, \dots, m$ et $\beta_i \subset P_i \times Q_i$, pour $i = 1, \dots, m-2$. Nous noterons $\beta_0 = \nu$ et $\beta_{m-1} = \alpha_m$. Pour tout entier $i = 1, \dots, m-1$, notons alors $\mathcal{E}(\beta_i)$ l'ensemble

$$\{T_i \text{ tableau de Young sur } \alpha_i : T_i \cdot U(\beta_i) = U(\beta_{i-1})\}.$$

Le cardinal de \mathcal{E}_i est donc égal à $c_{\alpha_i \beta_i}^{\beta_{i-1}}$.

Soit \mathcal{T} l'ensemble

$$\{U \text{ tableau sur le sous-diagramme gauche } \alpha_1 * \dots * \alpha_m \subset \mu/\lambda : \text{Rect}(U) = U(\nu)\}.$$

Alors d'après Zelevinsky, le cardinal de \mathcal{T} est égal à $c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\nu$.

Considérons maintenant l'application

$$\Phi : \begin{cases} \bigcup_{i=1, \dots, m-2} \beta_i \subset P_i \times Q_i & \prod_{i=1}^{m-1} \mathcal{E}(\beta_i) & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ (T_1, \dots, T_{m-1}) & & \longmapsto & T_1 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m). \end{cases}$$

L'application Φ est clairement injective. Montrons qu'elle est surjective. Il est clair qu'un tableau U dans \mathcal{T} s'écrit $U = T_1 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m)$ où chaque T_i , pour $i = 1, \dots, m-1$, est un tableau de Young sur le diagramme α_i . Nous allons montrer par récurrence que si $\text{Rect}(U) = U(\nu)$, il existe une suite de diagrammes $\beta_1, \dots, \beta_{m-2}$ telle que chaque T_i appartienne à $\mathcal{E}(\beta_i)$.

Par définition du produit $*$ sur les tableaux de Young, il découle de l'identité

$$\text{Rect}(T_1 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m)) = U(\nu)$$

que

$$T_1 \cdot \text{Rect}(T_2 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m)) = U(\nu). \quad (32)$$

$\text{Rect}(T_2 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m))$ est un tableau de Young sur un certain diagramme $\beta_1 \subset P_1 \times Q_1$. De plus, il découle de (32) que $\text{Rect}(T_2 * \dots * T_{m-1} * U(\alpha_m))$ est nécessairement égal à $U(\beta_1)$. On conclut alors la construction des β_i par récurrence.

La formule (31) découle immédiatement de la bijectivité de Φ , le point 2. du lemme est donc démontré. Le cas 1. du lemme s'en suit en posant $\alpha_i = p_i \times q_i$. Ce qui conclut la démonstration du lemme 10.

Dans la suite, notons \mathfrak{p}_L^+ l'intersection $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{l}(\lambda, \mu)$. On introduit alors $E(G^{\text{nc}}, L(\lambda, \mu))$ (ou juste $E(G, L)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté) le sous-espace de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ engendré par les tranlatés par K du sous-espace $\bigwedge \mathfrak{p}_L^+$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la proposition clef de cette section.

Proposition 11 Soient λ, μ et ν trois partitions incluses dans $p \times q$ telles que (λ, μ) forme un couple compatible. Notons $L = L(\lambda, \mu)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_\nu.V(\lambda, \mu) \neq 0$ dans $\bigwedge \mathfrak{p}$;
2. la partition ν s'inscrit dans μ/λ ;
3. $V(\nu) \subset E(G, L)$.

De plus, les éléments $\{C_\nu.v(\lambda) \otimes w(\mu)^*\}$, où ν décrit l'ensemble des partitions $\subset p \times q$ qui s'inscrivent dans μ/λ , sont linéairement indépendants.

Démonstration. Pour simplifier les notations, posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\lambda, \mu)$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\lambda, \mu)$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\lambda, \mu)$. Rappelons que $v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*$ est un générateur de la droite $\bigwedge^{|\lambda|+|\mu|}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Le lemme suivant, simple exercice d'algèbre linéaire, est dû à Venkataramana [23, Lemma 1.3].

L'inclusion $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ induit par dualité (pour la forme de Killing) une application $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ que nous dirons “de restriction”.

Lemme 12 Considérons l'application de restriction $B : (\bigwedge \mathfrak{p})^T \rightarrow (\bigwedge(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}))^T$ et le cup-produit $A : (\bigwedge \mathfrak{p})^T \rightarrow \bigwedge \mathfrak{p}$ donné par $y \mapsto y \wedge v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*$. Alors les noyaux de A et B sont les mêmes.

Soit $\hat{X}_L = L_u/(L_u \cap K)$ le dual compact de $X_L = L/L \cap K$. L'espace symétrique hermitien compact \hat{X}_L se plonge naturellement dans la grassmannienne $\hat{X}_G = \mathbb{G}_{p,q}$. En cohomologie on peut donc parler de l'application de restriction :

$$\text{res} : H^*(\hat{X}_G) \rightarrow H^*(\hat{X}_L).$$

Rappelons que C_ν s'identifie à une classe de cohomologie dans $H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \simeq H^*(\hat{X}_G)$. Le lemme suivant est également dû à Venkataramana [23, Lemma 1.4], on en esquisse la démonstration pour simplifier la lecture du texte.

Lemme 13

$$C_\nu.V(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow C_\nu \in \text{Ker} \left(H^*(\hat{X}_G) \xrightarrow{\text{res}} H^*(\hat{X}_L) \right).$$

Démonstration du lemme 13. Le K -module $V(\lambda, \mu)$ est engendré par $v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*$, et C_ν est K -invariant, on a donc :

$$C_\nu.V(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow C_\nu.v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* = 0.$$

C'est équivalent au fait que C_ν appartient au noyau de l'application A du lemme 12. D'après ce dernier c'est donc équivalent au fait que C_ν appartient au noyau de l'application B . Mais $B(C_\nu) = 0$ si et seulement si C_ν est dans le noyau de l'application de restriction

$$\left(\bigwedge \mathfrak{p} \right)^K \rightarrow \left(\bigwedge \mathfrak{p}_L \right)^{K \cap L}.$$

Ce qui conclut la démonstration du lemme 13.

Remarquons immédiatement que l'ensemble $\{C_\nu.v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* : \nu \subset p \times q, C_\nu.V(\lambda, \mu) \neq 0\}$ est identique à l'ensemble $\{B(C_\nu).v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* : \nu \subset$

$p \times q$, $C_\nu.V(\lambda, \mu) \neq 0\}$. Mais, via le plongement $\bigwedge \mathfrak{p}_L \otimes \bigwedge (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}) \rightarrow \bigwedge \mathfrak{p}$, les éléments $B(C_\nu).v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*$ sont simplement les tenseurs décomposables $B(C_\nu) \otimes (v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*)$ et sont donc linéairement indépendants.

Continuons la démonstration de la proposition 11. D'après le lemme 12 et (24), et en conservant les mêmes notations, on doit comprendre l'application naturelle de restriction :

$$H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \xrightarrow{\text{res}} \bigotimes_{i=1}^m H^*(\mathbb{G}_{p_i,q_i}), \quad (33)$$

où $p_1 + \dots + p_m \leq p$, $q_1 + \dots + q_m \leq q$, $\prod_{i=1}^m \mathbb{G}_{p_i,q_i}$ est naturellement plongé dans $\mathbb{G}_{p,q}$, *i.e.* via l'inclusion de L dans G^{nc} et où l'on a composé l'application induite en cohomologie par la restriction et l'isomorphisme de Kunneth.

Lemme 14 *Soit $\nu \subset p \times q$ une partition. Alors, l'image de C_ν par l'application de restriction (33) est :*

$$\text{res}(C_\nu) = \sum_{\substack{\alpha_i \subset p_i \times q_i \\ i=1, \dots, m}} c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\nu C_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes C_{\alpha_m}.$$

Démonstration du lemme 14. Supposons tout d'abord que $m = 2$, $p_1 + p_2 = p$ et que $q_1 + q_2 = q$. Le fibré tautologique \hat{T} au-dessus de $\mathbb{G}_{p,q}$ induit via le plongement $\mathbb{G}_{p_1,q_1} \times \mathbb{G}_{p_2,q_2} \subset \mathbb{G}_{p,q}$, un fibré sur le produit $\mathbb{G}_{p_1,q_1} \times \mathbb{G}_{p_2,q_2}$ qui est isomorphe au produit du fibré tautologique \hat{T}_1 sur \mathbb{G}_{p_1,q_1} par le fibré tautologique \hat{T}_2 sur \mathbb{G}_{p_2,q_2} . La formule de Whitney sur les classes de Chern implique alors que, via l'isomorphisme de Kunneth, la classe de Chern totale de ce fibré est égale au produit tensoriel des classes de Chern $c(\hat{T}_1)$ et $c(\hat{T}_2)$. Par fonctorialité des classes de Chern, on en déduit que la restriction de $c(\hat{T})$ au produit $\mathbb{G}_{p_1,q_1} \times \mathbb{G}_{p_2,q_2}$ est donnée par :

$$c(\hat{T})|_{(\mathbb{G}_{p_1,q_1} \times \mathbb{G}_{p_2,q_2})} = c(\hat{T}_1) \otimes c(\hat{T}_2). \quad (34)$$

Notons dorénavant, C_α^1 (resp. C_β^2) la classe de Schubert associée à une partition $\alpha \subset p_1 \times q_1$ (resp. $\beta \subset p_2 \times q_2$) dans la cohomologie $H^*(\mathbb{G}_{p_1,q_1})$ (resp. $H^*(\mathbb{G}_{p_2,q_2})$). L'équation (34) implique alors que pour tout entier $k \leq p$,

$$(C_{(1^k)})|_{(\mathbb{G}_{p_1,q_1} \times \mathbb{G}_{p_2,q_2})} = \sum_{a+b=k} C_{(1^a)}^1 \otimes C_{(1^b)}^2. \quad (35)$$

Notons Λ_m l'anneau des polynômes symétriques à coefficients entiers de m variables. Rappelons qu'une base de Λ_m est fournit par les *fonctions de Schur* dont on renvoie à [9] ou [16] pour une définition. Plus précisément, lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de longueur m au plus, les fonctions de Schur s_λ forment une base de Λ_m .

Il est alors classique (cf. [9], [16]) que l'application

$$\varphi_{p,q} : \Lambda_p \rightarrow H^*(\mathbb{G}_{p,q}),$$

qui à la fonction de Schur s_λ associe la classe de Schubert C_λ si $\lambda \subset p \times q$, et zéro sinon, est un morphisme d'anneaux surjectif. Nous considérerons de même les morphismes d'anneaux surjectifs :

$$\varphi_{p_1,q_1} : \Lambda_{p_1} \rightarrow H^*(\mathbb{G}_{p_1,q_1}),$$

et

$$\varphi_{p_2, q_2} : \Lambda_{p_2} \rightarrow H^*(\mathbb{G}_{p_2, q_2}).$$

Numérotons $(x_1, \dots, x_{p_1}, y_1, \dots, y_{p_2})$ les p variables d'une fonction de Λ_p , alors Λ_p s'identifie au produit tensoriel $\Lambda_{p_1} \otimes \Lambda_{p_2}$ et d'après [9, §5.2, Exercice 4],

$$s_\nu(x_1, \dots, x_{p_1}, y_1, \dots, y_{p_2}) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}^\nu s_\alpha(x_1, \dots, x_{p_1}) s_\beta(y_1, \dots, y_{p_2}). \quad (36)$$

Puisque la longueur de la partition sous-jacente à un produit de tableaux de Young est toujours inférieure à la somme des longueurs des partitions sous-jacentes à ces deux tableaux, il découle de l'identité (36) et des morphismes $\varphi_{p,q}$, φ_{p_1, q_1} et φ_{p_2, q_2} que l'application

$$R : \begin{cases} H^*(\mathbb{G}_{p,q}) & \longrightarrow H^*(\mathbb{G}_{p_1, q_1}) \otimes H^*(\mathbb{G}_{p_2, q_2}) \\ C_\nu & \longmapsto \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta}^\nu C_\alpha^1 \otimes C_\beta^2 \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux. Remarquons que

$$R(C_{(1^k)}) = \sum_{a+b=k} C_{(1^a)}^1 \otimes C_{(1^b)}^2.$$

Puisque les classes $C_{(1^k)}$ pour $k = 0, \dots, p$ engendrent l'anneau $H^*(\mathbb{G}_{p,q})$ et compte tenu des relations (35), le morphisme R est nécessairement égal au morphisme de restriction

$$\text{res} : H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \rightarrow H^*(\mathbb{G}_{p_1, q_1}) \otimes H^*(\mathbb{G}_{p_2, q_2}).$$

Finalement, lorsque $m = 2$, $p_1 + p_2 = p$ et $q_1 + q_2 = q$, nous avons démontré que pour toute partition $\nu \subset p \times q$,

$$\text{res}(C_\nu) = \sum_{\substack{\alpha \subset p_1 \times q_1 \\ \beta \subset p_2 \times q_2}} c_{\alpha\beta}^\nu C_\alpha^1 \otimes C_\beta^2. \quad (37)$$

Par récurrence sur m ⁴, on en déduit que si $\nu \subset p \times q$ est une partition, alors l'image de C_ν par l'application de restriction (33) est :

$$\text{res}(C_\nu) = \sum_{\substack{\alpha_i \subset p_i \times q_i \\ i = 1, \dots, m \\ \beta_j \subset p_j \times q_j \\ j = 1, \dots, m-2}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} c_{\alpha_i \beta_i}^{\beta_{i-1}} \right) C_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes C_{\alpha_m},$$

où on a posé $\beta_0 = \nu$ et $\beta_{m-1} = \alpha_m$. Le lemme 14 découle alors du lemme 10.

Concluons maintenant la démonstration de la proposition 11. L'équivalence entre les points 1. et 2. découle des lemmes 13 et 14. L'équivalence de ces deux points avec le point 3. découle du lemme suivant dû à Venkataramana [23, Lemma 1.5].

⁴Quitte à rajouter des facteurs \mathbb{G}_{p_i, q_i} que l'on "oublie" de façon à ce que $p = p_1 + \dots + p_m$ et $q = q_1 + \dots + q_m$.

Lemme 15 *En conservant les notations précédentes, le noyau de l'application de restriction*

$$\text{res} : H^*(\hat{X}_G) \rightarrow H^*(\hat{X}_L)$$

contient la classe de Schubert C_ν si et seulement si $V(\nu) \subset E(G, L)^\perp$, où l'orthogonal est pris par rapport au produit scalaire induit par la forme de Killing.

Puisque le K -sous-espace $V(\nu)$ de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ est irréductible et de multiplicité 1, il est nécessairement inclus dans $E(G, L)$ ou dans son orthogonal. La proposition 11 découle des lemmes 13 et 15.

Décomposition “à la Lefschetz”

Fixons maintenant un sous-groupe de congruence Γ dans G . Soit (λ, μ) un couple compatible de partition. Nous noterons $H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma)) = H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(A(\lambda, \mu) : \Gamma)$ la $A(\lambda, \mu)$ -composante fortement primitive de la cohomologie de $S(\Gamma)$. La formule de Matsushima et la classification de Vogan-Zuckerman impliquent le théorème suivant.

Théorème 16 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G . Pour chaque couple d'entiers (i, j) avec $i + j \leq pq$, on a :*

$$H^{i,j}(S(\Gamma)) = \bigoplus_{\substack{(\lambda, \mu) \text{ couple compatible} \\ \text{de partitions avec} \\ |\lambda| \leq i, |\hat{\mu}| \leq j}} \bigoplus_{\substack{\nu_i \subset p_i \times q_i \\ i = 1, \dots, m}} E_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda, \mu}(S(\Gamma)),$$

où le diagramme gauche μ/λ est réunion de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$ ne s'intersectant qu'en des sommets et chaque $E_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$ est isomorphe à $H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$.

Cette décomposition est en général plus fine que celle induite par l'action des classes de Chern. Ainsi par exemple pour $p = q = 3$, si l'on considère $\lambda_1 = (2, 2)$, $\mu_1 = (3, 2, 1)$, $\lambda_2 = (2, 1, 1)$ et $\mu_2 = (3, 2, 1)$. Il existe bien évidemment une image entre les tableaux gauches μ_1/λ_1 et μ_2/λ_2 et nous verrons au cours de la démonstration du théorème suivant que l'action naturelle des classes de Chern de $S(\Gamma)$ sur la cohomologie ne distingue alors pas le sous-espace $H^{\lambda_1, \mu_1}(S(\Gamma))$ du sous-espace $H^{\lambda_2, \mu_2}(S(\Gamma))$. On peut néanmoins montrer le théorème suivant.

Théorème 17 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G et soit $\eta : H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \rightarrow H^*(S(\Gamma))$ l'application définie en (30). Fixons λ, μ et ν trois partitions incluses dans $p \times q$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors,*

1. *pour toute classe fortement primitive $s \in H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$, $\eta(C_\nu).s = 0$ si et seulement si la partition ν ne s'inscrit pas dans μ/λ , et*
2. *lorsque le diagramme gauche μ/λ est rectangulaire égal à $a \times b$ avec $a = p$ ou $b = q$,*

$$H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma)) = \left\{ s \in H^{|\lambda|, |\hat{\mu}|}(S(\Gamma)) : \eta(C_\nu).s = 0, \forall \nu \not\subset a \times b \right\}.$$

3. si $s \in H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$ est une classe non nulle, les éléments

$$\{C_\nu.s : \nu \subset p \times q, \nu \text{ s'inscrit dans } \mu/\lambda\}$$

sont linéairement indépendants.

Démonstration. Soit s une classe fortement primitive dans $H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$. Alors d'après la formule de Matsushima,

$$s \in \text{Hom}_K(V(\lambda, \mu), C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})).$$

On en déduit que

$$\eta(C_\nu).s = 0 \Leftrightarrow C_\nu.V(\lambda, \nu) = 0 \text{ dans } \bigwedge \mathfrak{p}.$$

Le point 1. du théorème 17 découle donc de la proposition 11. Le point 3. s'en déduit pareillement.

Supposons maintenant le diagramme gauche μ/λ rectangulaire égal à $a \times b$ et considérons une classe $s \in H^{|\lambda|, |\mu|}(S(\Gamma))$ telle que $\eta(C_\nu).s = 0$ pour tout diagramme $\nu \not\subset a \times b$. D'après la formule de Matsushima, on peut supposer que $s \in \text{Hom}_K(V(\alpha, \beta), C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}}))$, pour un certain couple compatible de partitions (α, β) vérifiant $|\alpha| = |\lambda|$ et $|\beta| = |\mu|$. Alors le diagramme gauche β/α comporte ab cases. S'il est constitué de plusieurs rectangles, l'une des partitions $\nu = (b+1)$ ou $\nu = (1^a)$ s'y inscrit nécessairement et $C_\nu.V(\alpha, \beta) \neq 0$, ce qui est absurde puisque $\nu \not\subset a \times b$ et donc $\eta(C_\nu).s = 0$. Le diagramme gauche β/α est donc rectangulaire et comporte ab cases. De la même manière on montre que le diagramme rectangulaire β/α est nécessairement égal à $a \times b$. Il reste à comprendre sa position dans le diagramme $p \times q$. Mais sous l'hypothèse du point 2. du théorème 17 celle-ci est déterminée par la connaissance de $|\lambda|$ et de $|\mu|$. Finalement, on a nécessairement $\alpha = \lambda$ et $\beta = \mu$. Ce qui conclut la démonstration du théorème 17.

Le théorème 17 contient la décomposition de Lefschetz usuelle⁵ et implique le corollaire suivant dû à Parthasarathy [20, Theorem 2 et 3 et Corollary 2.24].

Corollaire 18 1. Le groupe $H^{l,0}(S(\Gamma))$ est trivial si l n'est pas de la forme $pq - ab$ pour certains entiers a et b tels que $0 \leq a \leq p$ et $0 \leq b \leq q$.

2. Pour $l \neq pq$, soit $I_l = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq a \leq p, 1 \leq b \leq q \text{ et } pq - ab = l\}$. Pour $l = pq$, soit $I_l = \{(0, 0)\}$. Soit $H(a, b) = \{s \in H^{pq-ab, 0}(S(\Gamma)) : C_{a+1}.s = \dots = C_p.s = 0 \text{ et } C'_{b+1}.s = \dots = C'_q.s = 0\}$. Alors, $H^{l,0}(S(\Gamma)) = \bigoplus_{(a,b) \in I_l} H(a, b)$.

3. Pour toute classe non nulle $s \in H(a, b)$ et $y \in \eta(H^*(\mathbb{G}_{p,q}))$, $y.s = 0$ si et seulement si y appartient à l'idéal engendré par C_{a+1}, \dots, C_p et $C'_{b+1} = \dots = C'_q$.

4. Soit s une classe non nulle dans $H(a, b)$. Alors, les éléments $\{C_1^{k_1} C_2^{k_2} \dots C_a^{k_a}.s\}$ (resp. $\{(C'_1)^{k_1} \dots (C'_b)^{k_b}.s\}$) où $C_1^{k_1} C_2^{k_2} \dots C_a^{k_a}$ (resp. $(C'_1)^{k_1} \dots (C'_b)^{k_b}$) parcourt l'ensemble des monômes de degré total $\leq b$ (resp. $\leq a$) en C_1, C_2, \dots, C_a (resp. C'_1, \dots, C'_b) sont linéairements indépendants.

⁵Et montre que celle-ci est optimale pour $p = 1$, où l'optimalité signifie que la décomposition en K -types induite par l'action des classes de Chern est une décomposition en irréductible. Signalons au passage l'article précurseur de Chern [5] sur ces questions. Les deux théorèmes ci-dessus peuvent être interprété comme la complétion du programme de Chern dans le cas des variétés localement modelées sur X_G .

1.2 Sous-variétés de Shimura de Sh^0G

Notre principal but est de comprendre l'application de restriction stable de la cohomologie de Sh^0G vers une sous-variété de Shimura. Dans cette section nous classifions les variétés de Shimura pouvant apparaître comme sous-variété de Sh^0G .

Commençons par décrire quelques sous-groupes réels du groupe $U(p, q)$.

Le groupe $U(p, q)$ préserve la forme hermitienne standard $h(x, y) = \sum |x_\mu|^2 - \sum |y_\nu|^2$ sur la somme directe $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$. Soient a, b, i, j des entiers strictement positifs. Supposons $ia + jb \leq p$ et $ib + ja \leq q$. L'espace $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{C}^q$ se décompose en une somme directe

$$\underbrace{(\mathbb{C}^a \oplus \mathbb{C}^b) \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}^a \oplus \mathbb{C}^b)}_{i \text{ fois}} \oplus \underbrace{(\mathbb{C}^b \oplus \mathbb{C}^a) \oplus \dots \oplus (\mathbb{C}^b \oplus \mathbb{C}^a)}_{j \text{ fois}} \oplus (\mathbb{C}^{p-ia-jb} \oplus \mathbb{C}^{q-ib-ja}).$$

On réalise alors le groupe $U(a, b)$ comme le sous-groupe du groupe $U(p, q)$ qui préserve chacun des i sous-espaces $\mathbb{C}^a \oplus \mathbb{C}^b$ en agissant de manière standard, préserve les j sous-espaces $\mathbb{C}^b \oplus \mathbb{C}^a$ en agissant comme son conjugué complexe après permutation des facteurs \mathbb{C}^a et \mathbb{C}^b et agit trivialement sur $\mathbb{C}^{p-ia-jb} \oplus \mathbb{C}^{q-ib-ja}$. Pour simplifier, nous noterons ce plongement de $U(a, b)$ dans $U(p, q)$:

$$g \in U(a, b) \mapsto (\underbrace{g, \dots, g}_{i \text{ fois}}, \underbrace{\tilde{g}, \dots, \tilde{g}}_{j \text{ fois}}, id). \quad (38)$$

Rappelons que le groupe GSp_a est le sous-groupe de $U(a, a)$ défini par :

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(a, a) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_a \\ -1_a & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_a \\ -1_a & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'application composée

$$g \in GSp_a \mapsto g \in U(a, a) \mapsto (\underbrace{g, \dots, g}_{i \text{ fois}}, \underbrace{\tilde{g}, \dots, \tilde{g}}_{j \text{ fois}}, id) \quad (39)$$

réalise donc un plongement de GSp_a dans $U(p, q)$.

Rappelons enfin que le groupe $O^*(2a)$ est le sous-groupe de $U(a, a)$ défini par :

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(a, a) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_a \\ 1_a & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_a \\ 1_a & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'application composée

$$g \in O^*(2a) \mapsto g \in U(a, a) \mapsto (\underbrace{g, \dots, g}_{i \text{ fois}}, \underbrace{\tilde{g}, \dots, \tilde{g}}_{j \text{ fois}}, id) \quad (40)$$

réalise donc un plongement de $O^*(2a)$ dans $U(p, q)$.

Soient $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ des entiers strictement positifs tels que $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$. On réalise alors le groupe $U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$ comme le sous-groupe du groupe $U(p, q)$ qui préserve les sous-espaces $E_i \oplus F_i$ pour chaque i et agit trivialement sur l'orthogonal de la somme directe de tous ces sous-espaces. À conjugaison par un élément de $U(p, q)$ près, le plongement

ainsi défini ne dépend pas du choix des sous-espaces E_i , F_i . Pour simplifier, nous le noterons :

$$(g_1, \dots, g_m) \in \prod_j U(p_j, q_j) \mapsto (g_1, \dots, g_m, id) \in U(p, q). \quad (41)$$

Remarquons que les plongements (38), (39) et (40) de GSp_a vérifient bien la condition (7).

Proposition 19 *Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$. Rappelons que, par définition, H est alors un sous-groupe de G qui est algébrique réductif connexe défini sur \mathbb{Q} et qui vérifie (5) et (7). Pour simplifier, nous supposons H maximal parmi tous les sous-groupes de G donnant la même sous-variété de Shimura. Notons H^{nc} le produit des facteurs non compact de $H(\mathbb{R})$. Alors, le groupe H^{nc} est un produit de groupes $U(a_j, b_j)$, GSp_{a_j} et $O^*(2a_j)$ et, à conjugaison par un élément de G^{nc} près, son plongement dans $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ s'obtient en composant au produit direct des morphismes (38), (39) et (40) le morphisme (41).*

Démonstration. On voit dorénavant le \mathbb{R} -groupe $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ comme $U_{p+q}(\mathbb{R}, h)$, où h est la forme hermitienne standard non dégénérée et de signature (p, q) sur \mathbb{C}^{p+q} .

Soit A l'algèbre sur \mathbb{R} : $M_{p+q}(\mathbb{C})$ munie de l'involution $\tau(X) = {}^t \overline{X}$. Le centre de A est le corps \mathbb{C} et puisque la restriction de τ à celui-ci est non triviale, l'involution τ est dite de deuxième espèce. L'algèbre complexifiée $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_{p+q}(\mathbb{C}) \oplus M_{p+q}(\mathbb{C})$ munie de l'involution $\tilde{\tau}(X, Y) = ({}^t Y, {}^t X)$. Le groupe GL_{p+q} s'identifie à $\{Z \in A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : Z\tilde{\tau}(Z) = 1_{p+q}\}$ et (cf. [21]) $\text{Aut}(GL_{p+q})$ s'identifie naturellement au groupe des automorphismes de l'algèbre $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ qui commutent à l'involution $\tilde{\tau}$. Le groupe G^{nc} est une forme réelle du groupe GL_{p+q} obtenue en le tordant par un cocycle $a \in H^1(\mathbb{R}, \text{Aut}_{\mathbb{C}}(GL_{p+q}))$. Considérons a comme un cocycle dans $H^1(\mathbb{R}, \text{Aut}_{\mathbb{C}}(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))$, nous pouvons alors construire l'algèbre tordue ${}_a(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. Puisque l'image par le cocycle a de la conjugaison complexe (générateur de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$) est un automorphisme qui commute à l'involution $\tilde{\tau}$, l'involution de ${}_a(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ déduite de $\tilde{\tau}$ commute à la conjugaison complexe. Notons alors B la sous-algèbre réelle de ${}_a(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ fixée par la conjugaison complexe. L'algèbre B est nécessairement simple sur \mathbb{C} avec une involution de seconde espèce. Plus précisément, $B = M_{p+q}(\mathbb{C})$ munie de l'involution tordue $\sigma(X) = H^{-1} {}^t \overline{X} H$, où H est la matrice de h dans la base canonique de \mathbb{C}^{p+q} . Et,

$$G^{\text{nc}} = \{X \in B : \sigma(X)X = 1_{p+q}\}. \quad (42)$$

Le sous-groupe réel H^{nc} de G^{nc} s'obtient donc en tordant un sous-groupe algébrique R de GL_{p+q} invariant par la conjugaison complexe. Il correspond à un tel sous-groupe la sous-algèbre de $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ préservée par $\text{Aut} R$ et équipée de l'involution induite par $\tilde{\tau}$. Cette algèbre à involution est nécessairement une somme directe de facteurs (C, ν) isomorphes (comme algèbre à involution) à l'un des trois types suivant d'algèbres (cf. [21]) :

1. $C = M_k(\mathbb{C})$, $\nu(X) = {}^t X$;
2. $C = M_k(\mathbb{C})$ avec k pair et $\nu(X) = J_k {}^t X J_k^{-1}$, où $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1_{k/2} \\ -1_{k/2} & 0 \end{pmatrix}$;

3. $C = M_k(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C})$, $\nu(X, Y) = ({}^tY, {}^tX)$.

Dans la suite, nous supposons pour simplifier qu'il n'y a qu'un seul facteur (C, ν) . Le cas général se traiterait pareillement et explique l'existence des plongements (41).

La torsion de l'algèbre $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par le cocycle a induit une torsion ${}_aC$ de l'algèbre C . Notons D la sous-algèbre réelle de ${}_aC$ fixée par la conjugaison complexe. L'algèbre D est réelle, simple sur son centre (égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et équipée d'une involution θ . Donc (cf. [21]) l'algèbre à involution (D, θ) est l'une des formes suivantes :

1. $D = M_k(\mathbb{R})$, $\theta(X) = P^t X P^{-1}$ et $P \in GL_k(\mathbb{R})$ symétrique;
2. $D = M_k(\mathbb{R})$ avec k pair, $\theta(X) = P^t X P^{-1}$ et $P \in GL_k(\mathbb{R})$ antisymétrique;
3. $D = M_{k/2}(\mathbb{H})$ avec k pair, $\theta(X) = P^t \overline{X} P^{-1}$ et $P \in GL_{k/2}(\mathbb{H})$ hermitienne;
4. $D = M_{k/2}(\mathbb{H})$ avec k pair, $\theta(X) = P^t \overline{X} P^{-1}$ et $P \in GL_{k/2}(\mathbb{H})$ antihermitienne;
5. $D = M_k(\mathbb{C})$, $\theta(X) = P^t \overline{X} P^{-1}$ et $P \in GL_k(\mathbb{C})$ hermitienne.

(Ici \mathbb{H} désigne l'algèbre des quaternions sur \mathbb{R} .)

Les deux premiers cas sont exclus puisque l'espace symétrique associé à H doit être hermitien et vérifier (7).

Maintenant, les seules représentations irréductibles de l'algèbre $M_k(\mathbb{C})$ sont la représentation standard \mathbb{C}^k et sa conjuguée. À conjugaison près les seuls plongements de l'algèbre $M_k(\mathbb{C})$ dans $M_{p+q}(\mathbb{C})$ sont diagonaux par blocs et de la forme suivante :

$$X \in M_k(\mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & X & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & X & & \\ & & & & \overline{X} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \overline{X} \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{C}), \quad (43)$$

où la matrice X (resp. \overline{X}) apparaît i (resp. j) fois sur la diagonale pour certains entiers i et j de somme $i + j \in [1, (p + q)/k]$.

(Le seul plongement d'algèbre de $M_k(\mathbb{C}) \oplus M_l(\mathbb{C})$ dans $M_{k+l}(\mathbb{C})$ est le plongement diagonal par blocs. Lorsque C a plusieurs facteurs, les différents plongements de C dans $M_{p+q}(\mathbb{C})$ sont donc obtenus en plongeant chaque facteur de C diagonalement par bloc et à l'aide d'un plongement du type (43). Rappelons que pour simplifier, nous supposons que C n'a qu'un seul facteur.)

Dans la suite, nous travaillerons toujours à conjugaison près sans le préciser.

Lorsque l'algèbre $C = M_k(\mathbb{C})$ est du premier type ci-dessus, elle se plonge

nécessairement dans $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_{p+q}(\mathbb{C}) \oplus M_{p+q}(\mathbb{C})$ comme

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & X & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & X & \\ & & & & \overline{X} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \overline{X} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & X & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & X & \\ & & & & \overline{X} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \overline{X} \end{pmatrix},$$

où X (resp. \overline{X}) apparaît i (resp. j) fois sur chaque diagonale. Dans ce cas l'algèbre réelle D déduite de C est du type 3 ci-dessus (on a déjà vu qu'elle ne peut pas être du type 1). L'entier k est donc nécessairement pair égal à $2a$ et le groupe réel H^{nc} est alors $O^*(2a)$. Le plongement correspondant de $O^*(2a)$ dans $U(p, q)$ est le plongement (40).

Lorsque l'algèbre $C = M_k(\mathbb{C})$ est du deuxième type (alors k est pair), elle se plonge nécessairement dans $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_{p+q}(\mathbb{C}) \oplus M_{p+q}(\mathbb{C})$ comme

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & X & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & X & \\ & & & & \overline{X} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \overline{X} \end{pmatrix} \\ \oplus \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & J_k X J_k^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_k X J_k^{-1} & \\ & & & & J_k \overline{X} J_k^{-1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & J_k \overline{X} J_k^{-1} \end{pmatrix},$$

où X et $J_k X J_k^{-1}$ (resp. \overline{X} et $J_k \overline{X} J_k^{-1}$) apparaissent i (resp. j) fois chacun sur les diagonales respectives. Dans ce cas l'algèbre D déduite de C est du type 4 ci-dessus (on a déjà vu qu'elle ne peut pas être du type 2). L'entier k est nécessairement égal à $2a$ et le groupe réel H^{nc} est alors $GS p_a$. Le plongement correspondant dans $U(p, q)$ est alors le plongement (39).

Enfin lorsque l'algèbre $C = M_k(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C})$ (troisième type), elle se plonge

nécessairement dans $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_{p+q}(\mathbb{C}) \oplus M_{p+q}(\mathbb{C})$ comme

$$X \oplus Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & X & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & X & & \\ & & & & \bar{X} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \bar{X} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & Y & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & Y & & \\ & & & & \bar{Y} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \bar{Y} \end{pmatrix},$$

où X (resp. Y) apparaît i fois sur la première (resp. deuxième) diagonale et \bar{X} (resp. \bar{Y}) apparaît j fois sur la première (resp. deuxième) diagonale. Dans ce cas l'algèbre D déduite de C est du type 5 ci-dessus. Le groupe réel H^{nc} est alors $U(a, b)$ pour deux entiers a, b de somme k . Le plongement correspondant dans $U(p, q)$ est alors le plongement (38).

La proposition 19 s'en déduit en mettant bout à bout ces différents cas.

Afin d'appliquer les résultats de la section précédente, nous aurons besoin de déterminer la classe duale $[\hat{X}_H]$ dans $H^*(\hat{X}_G)$ associer à chaque sous-variété de Shimura $Sh^0 H$ de $Sh^0 G$. Ce calcul ne faisant, en fait, appel qu'aux groupes réels, d'après la proposition 19 il nous suffira de déterminer $[\hat{X}_H]$ dans chacun des cas suivant :

1. $H^{\text{nc}} = U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$ avec $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$;
2. $H^{\text{nc}} = GSp_p$ et $p = q$;
3. $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$ et $p = q$.

C'est l'objet des trois propositions suivantes.

Proposition 20 Soient p_j, q_j avec $j = 1, \dots, m$ des entiers strictement positifs tels que $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$. Supposons que $H^{\text{nc}} = U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$. Alors, à un multiple scalaire non nul près, la classe duale

$$[\hat{X}_H] = \sum_{\nu \subset p \times q} c_{p_1 \times q_1 \dots p_m \times q_m}^{\nu} C_{\hat{\nu}} \in H^{pq - \sum_i p_i q_i}(\mathbb{G}_{p, q}).$$

Démonstration. Notons C la classe duale $[\hat{X}_H]$ à la sous-variété $\hat{X}_H = \mathbb{G}_{p_1, q_1} \times \dots \times \mathbb{G}_{p_m, q_m}$ de $\hat{X}_G = \mathbb{G}_{p, q}$. Une classe $C_{\nu} \in H^*(\mathbb{G}_{p, q})$ vérifie :

$$C_{\nu} \cdot C = \text{res}(C_{\nu}) \wedge C, \quad (44)$$

où $\text{res}: H^*(\mathbb{G}_{p, q}) \rightarrow H^*(\hat{X}_H)$ est l'application naturelle de restriction. En particulier, $C_{\nu} \cdot C \neq 0$ si et seulement si $\text{res}(C_{\nu}) \neq 0$. Ce qui d'après le lemme 13 et la proposition 11 est équivalent au fait que ν s'inscrive dans le diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$.

Rappelons (cf. par exemple [9]) que la classe duale de C_{ν} dans $H^*(\mathbb{G}_{p, q})$ est égale à $C_{\hat{\nu}}$. La classe C est donc égale à une combinaison linéaire à coefficients non nuls des classes $C_{\hat{\nu}}$ où ν décrit l'ensemble des partitions images du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ (on a nécessairement $|\nu| = p_1 q_1 + \dots + p_m q_m$).

$$\text{res}(C_\nu) = c_{p_1 \times q_1 \dots p_m \times q_m}^\nu C_{p_1 \times q_1} \otimes \dots \otimes C_{p_m \times q_m} \in H^*(\hat{X}_H) = \bigotimes_{i=1}^m H^*(\mathbb{G}_{p_i, q_i}).$$
$$C = \sum_{\nu \subset p \times q} c_{p_1 \times q_1 \dots p_m \times q_m}^\nu C_{\hat{\nu}} \in H^{pq - \sum_i p_i q_i}(\mathbb{G}_{p,q}).$$

Proposition 21 *Supposons $p = q$ et $H^{\text{nc}} = GSp_p$. Alors, à un multiple scalaire non nul près, la classe duale*

$$[\hat{X}_H] = C_\nu \in H^{\frac{p(p-1)}{2}}(\mathbb{G}_{p,p}),$$

[illegible]
$$\left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p, p) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1} \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{sym}^2(\rho) = \mathrm{sym}^2(\mathbb{C}^p) \subset \mathbb{C}^p \otimes (\mathbb{C}^p)^*.$$

Fixons maintenant une partition λ de poids $|\lambda| = \frac{p(p+1)}{2}$. (Remarquons que $\frac{p(p+1)}{2}$ est la dimension de $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h}$.) Notons $D^{\otimes k}$ la représentation de dimension un de $U(p)$ donnée par le déterminant à la puissance k .

28

Démonstration. Vue comme représentation de $U(p)(= K \cap H^{\text{nc}} \subset K)$ le module

$$V(\lambda) = (\mathbb{C}^p)^\lambda \otimes (\mathbb{C}^p)^{\lambda^*}.$$

Il est classique (cf. par exemple [9]) que sa décomposition en irréductibles est :

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\nu} [(\mathbb{C}^p)^{\nu}]^{\oplus c_{\lambda\lambda^*}^{\nu}}. \quad (45)$$

L'espace $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h} = \text{sym}^2(\mathbb{C}^p)$ s'identifie avec l'espace des matrices symétriques, il est engendré par les matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ ($1 \leq i, j \leq p$). On constate donc que si $\nu \not\subset p \times (p+1)$, la partition ν ne peut pas être le poids d'un vecteur du $U(p)(= K \cap H^{\text{nc}})$ -module $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$. En particulier, si $\nu \not\subset p \times (p+1)$, ν ne peut pas être le plus haut poids d'un sous-module irréductible de $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$.

Puisque dans la décomposition (45) chaque partition ν donnant lieu à un sous-module non trivial doit avoir un poids $|\nu| = |\lambda| + |\lambda^*| = p(p+1)$. L'image de chacun de ces sous-modules par l'application de restriction dans $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$ est nulle sauf éventuellement le sous-module

$$[(\mathbb{C}^p)^{\nu_0}]^{\oplus c_{\lambda\lambda^*}^{\nu_0}},$$

où $\nu_0 = p \times (p+1)$.

Il nous faut donc comprendre pour quelles partitions λ , le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\lambda^*}^{p \times (p+1)}$ est non nul. Supposons donc que la partition λ vérifie que $c_{\lambda\lambda^*}^{p \times (p+1)} \neq 0$. Commençons par remarquer que λ et λ^* sont alors nécessairement contenues dans $p \times (p+1)$. Ensuite remarquons que le calcul de Schubert implique si λ et μ sont deux partitions contenues dans une partition rectangulaire $a \times b$ et de somme des poids $|\lambda| + |\mu| = ab$ alors :

$$c_{\lambda,\mu}^{a \times b} = \delta_{\mu,\hat{\lambda}}.$$

(Ici δ est le symbole de Kronecker égal à un si ses deux arguments sont identiques, à zéro sinon.)

Revenons maintenant au coefficient $c_{\lambda\hat{\lambda}}^{p \times (p+1)}$. D'après ce que nous venons de voir, le coefficient $c_{\lambda\hat{\lambda}}^{p \times (p+1)}$ est non nul si et seulement si $c_{\lambda\hat{\lambda}}^{p \times (p+1)} = 1$ ce qui est équivalent à ce que $\lambda^* = \hat{\lambda}$ (ici la notation $\hat{\lambda}$ désigne la partition complémentaire de λ dans le rectangle $p \times (p+1)$). Ceci se traduit en

$$\lambda_{p+1-i} + \max\{j : \lambda_j \geq i\} = p+1,$$

pour tout entier $i = 1, \dots, p$. D'où l'on déduit $\lambda_i = p+1-i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\lambda = (p, p-1, \dots, 1)$.

Nous avons donc démontré que l'image de $V(\lambda)$ par l'application de restriction dans $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$ est nulle sauf si $\lambda = (p, p-1, \dots, 1)$. Montrons maintenant que lorsque $\lambda = (p, p-1, \dots, 1)$, l'image de $V(\lambda)$ dans $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$ est non nulle. Supposons donc $\lambda = (p, p-1, \dots, 1)$. Il est clair que le vecteur

$$\bigwedge_{j=1}^p \bigwedge_{i=1}^j e_i \otimes f_j^* \in V(\lambda).$$

(Appliquer la permutation $(1 \ 2 \ \dots \ p)$ sur les colonnes de $M_p(\mathbb{C}) = E \otimes F^*$, via l'action d'un élément de K .)

L'image de ce vecteur dans $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h}) = \bigwedge \text{sym}^2(\mathbb{C}^p)$ est un multiple non nul de

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq p} (E_{i,j} + E_{j,i})$$

qui engendre un $U(p)$ -module isomorphe au module $D^{\otimes(p+1)}$. Ce qui conclut la démonstration du lemme 22.

Continuons la démonstration de la proposition 21. Notons C la classe duale $[\hat{X}_H]$ à la sous-variété \hat{X}_H de $\hat{X}_G = \mathbb{G}_{p,q}$. D'après le lemme 13 (qui reste valable dans ce cas, cf. [23]) une classe $C_\nu \in H^*(\mathbb{G}_{p,q})$ vérifie $C_\nu.C \neq 0$ si et seulement si $\text{res}(C_\nu) \neq 0$ où $\text{res}: H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \rightarrow H^*(\hat{X}_H)$ est l'application naturelle de restriction. Mais chaque classe C_ν est K -invariante et donc sa restriction à \hat{X}_H est $(K \cap H^{\text{nc}} = U(p))$ -invariante. Il suffit donc de vérifier $\text{res}(C_\nu) \neq 0$ au point base. Ce qui nous ramène au lemme 22.

On conclut que si $\nu \subset p \times p$ est une partition de poids $|\nu| = \frac{p(p+1)}{2}$,

$$C_\nu.C \neq 0 \Leftrightarrow \nu = (p, p-1, \dots, 1).$$

La classe C est donc nécessairement égale à un multiple scalaire non nul de C_ν . Ce qui démontre la proposition 21.

Proposition 23 *Supposons $p = q$ et $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$. Alors, à un multiple scalaire non nul près, la classe duale*

$$[\hat{X}_H] = C_\nu \in H^{\frac{p(p+1)}{2}}(\mathbb{G}_{p,p}),$$

où ν est la partition $(p, p-1, \dots, 1)$ de diagramme de Young

$$p \text{ cases } \left\{ \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & \square & \square & \square & \square & \end{array} \right.$$

Démonstration. Supposons $p = q$, alors $G^{\text{nc}} = U(p, p)$ et (d'après la proposition 19) on peut supposer que $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$ est donné par :

$$\left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p, p) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, le groupe $K \cap H^{\text{nc}} = U(p)$ se plonge dans K par l'application :

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix},$$

et l'action de $U(p)$ sur $\mathfrak{p}^+ = \mathbb{C}^p \otimes (\mathbb{C}^p)^*$ est isomorphe à la représentation $\rho \otimes \rho$, où ρ est la représentation standard de $U(p)$ sur \mathbb{C}^p . Via le plongement de H^{nc} dans G^{nc} , $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h}$ se trouve identifié avec

$$\bigwedge^2 \rho = \bigwedge^2 \mathbb{C}^p \subset \mathbb{C}^p \otimes (\mathbb{C}^p)^*.$$

(On identifie $\bigwedge^2 \mathbb{C}^p$ avec l'espace des matrices antisymétriques.)

Fixons maintenant une partition λ de poids $|\lambda| = \frac{p(p-1)}{2}$. (Remarquons que $\frac{p(p-1)}{2}$ est la dimension de $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h}$.) La démonstration du lemme 22 se traduit facilement en une démonstration du lemme suivant.

Lemme 24 *L'image de $V(\lambda) \subset \bigwedge \mathfrak{p}^+$ par l'application de restriction dans $\bigwedge(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h})$ est nulle sauf si $\lambda = (p-1, p-2, \dots, 1)$ auquel cas elle est isomorphe au $U(p)$ -module $D^{\otimes(p)}$.*

On conclut alors la démonstration de la proposition 23 en suivant mot pour mot la fin de la démonstration de la proposition 21.

1.3 Restriction stable à une sous-variété de Shimura

Dans cette section nous démontrons des critères d'injectivité de l'application de restriction stable (11) aux différentes sous-variétés de Shimura de $Sh^0 G$. Les critères seront indépendant des \mathbb{Q} -structures des groupes algébriques en question. La proposition 19 permet alors de réduire le problème aux trois types suivants de sous-variétés de Shimura $Sh^0 H \subset Sh^0 G$:

1. $H^{\text{nc}} = U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$ avec $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$;
2. $H^{\text{nc}} = GSp_p$ et $p = q$;
3. $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$ et $p = q$.

C'est l'objet des deux théorèmes qui suivent ainsi que d'une remarque finale concernant le cas $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$.

Théorème 25 *Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$ avec $H^{\text{nc}} = U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$, $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors, l'application*

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H)$$

*de restriction stable est injective en restriction à $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ s'il existe une partition ν image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ telle que $\hat{\nu}$ s'inscrive dans le diagramme gauche μ/λ .*

Démonstration. La démonstration repose sur un théorème de Venkataramana, sur la proposition 11 et sur la proposition 20. Plus précisément, d'après [24, Theorem 6], si s est un classe dans $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ dont la restriction stable $\text{Res}_H^G(s)$ à $Sh^0 H$ est triviale, alors

$$[\hat{X}_H].V(\lambda, \mu) = 0 \text{ dans } \bigwedge \mathfrak{p}.$$

D'après la proposition 20,

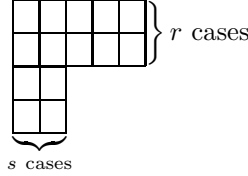
$$[\hat{X}_H] = \sum_{\nu \subset p \times q} c_{p_1 \times q_1 \dots p_m \times q_m}^\nu C_\nu \in H^{pq - \sum_i p_i q_i}(\mathbb{G}_{p,q}).$$

Puisque d'après la proposition 11, $C_{\hat{\nu}}.V(\lambda, \mu) \neq 0$ si et seulement si $\hat{\nu}$ s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ et que les éléments $\{C_{\hat{\nu}}.v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*\}$, où $\hat{\nu}$ parcourt l'ensemble des partitions qui s'inscrivent dans le diagramme gauche μ/λ , sont linéairement indépendants, on conclut que $[\hat{X}_H].V(\lambda, \mu) \neq 0$ si et seulement s'il existe une partition $\nu \subset p \times q$ image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ (autrement dit $c_{p_1 \times q_1 \dots p_m \times q_m}^\nu \neq 0$) telle que $\hat{\nu}$ s'inscrive dans le diagramme gauche μ/λ . Ce qui clôt la démonstration du théorème 25.

Rappelons que le sous-espace $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ apparait dans la cohomologie holomorphe si et seulement si $\mu = p \times q$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un couple d'entier (r, s) avec $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$ tels que

$$\lambda = (\underbrace{q, \dots, q}_{r \text{ fois}}, \underbrace{s, \dots, s}_{p-r \text{ fois}})$$

de diagramme de Young :



(Ici $p = 4$ et $q = 5$.)

Dans ce cas (et pour souligner le fait qu'il apparait dans la cohomologie holomorphe) nous noterons $H^{(r,s),0}(Sh^0 G)$ le sous-espace $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ de la cohomologie holomorphe de degré $|\lambda| = rq + s(p-r)$ (remarquons que $|\hat{\mu}| = 0$).

Corollaire 26 (Clozel-Venkataramana) *Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$ avec $H^{nc} = U(p_1, q_1) \times \dots \times U(p_m, q_m)$, $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$. Soit (r, s) un couple d'entiers naturels avec $r \leq p$ et $s \leq q$. Alors, l'application*

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H)$$

*de restriction stable est **injective** en restriction à $H^{(r,s),0}(Sh^0 G)$ si et seulement si soit $p_1 + \dots + p_m = p$, $r = 0$ et $s \leq q_i$ pour chaque i , soit $q_1 + \dots + q_m = q$, $s = 0$ et $r \leq p_i$ pour chaque i .*

Démonstration. Commençons par montrer que la condition est suffisante. Ici le diagramme gauche μ/λ est en fait le diagramme rectangulaire $(p-r)(q-s)$. Une partition α s'inscrit donc dans μ/λ si et seulement si $l(\alpha) \leq p-r$ et $l(\alpha^*) \leq q-s$.

Quitte à réordonner les facteurs $U(p_i, q_i)$ on peut supposer $q_1 \leq \dots \leq q_m$. Il est alors clair que la partition

$$\nu_0 = (\underbrace{q_m, \dots, q_m}_{p_m \text{ fois}}, \dots, \underbrace{q_1, \dots, q_1}_{p_1 \text{ fois}})$$

est une image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Or,

$$l(\hat{\nu}_0) = \begin{cases} p - p_m & \text{si } q_m = q \\ p & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$l(\hat{\nu}_0^*) = \begin{cases} q & \text{si } p_1 + \dots + p_m < p \\ q - q_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc si $p_1 + \dots + p_m = p$, $r = 0$ et $s \leq q_i$ pour chaque i , la partition ν_0 s'inscrit dans μ/λ et, d'après le théorème 25, l'application de restriction stable Res_H^G est donc injective en restriction à $H^{(r,s),0}(Sh^0 G) = H^{\lambda,\mu}(Sh^0 G)$.

On démontre de même que Res_H^G est injective en restriction à $H^{(r,s),0}(Sh^0 G)$ lorsque $q_1 + \dots + q_m = q$, $s = 0$ et $r \leq p_i$ pour chaque i .

Montrons maintenant que ces conditions suffisantes sont en fait nécessaires. Il nous faut pour cela d'abord comprendre plus précisément $l(\hat{\nu})$ et $l(\hat{\nu}^*)$ lorsque ν est une image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 27 *Soient $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ des entiers ≥ 1 . Soit ν une partition image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Alors,*

1. $l(\nu) \leq p_1 + \dots + p_m$,
2. $\nu_{p_1+\dots+p_m} \leq \min q_i$, et
3. si $\nu_{p_1+\dots+p_m} \neq 0$ alors $\nu_1 < q_1 + \dots + q_m$.

Démonstration du lemme 27. Pour simplifier nous supposons $q_1 \leq \dots \leq q_m$. Il suffit alors de montrer que toute partition ν image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ vérifie

- $l(\nu) \leq p_1 + \dots + p_m$,
- $\nu_{p_1+\dots+p_m} \leq q_1$, et
- si $\nu_{p_1+\dots+p_m} \neq 0$ alors $\nu_1 < q_1 + \dots + q_m$.

Puisque la longueur de la partition sous-jacente au produit de deux tableaux de Young est toujours inférieure à la somme des longueurs des partitions sous-jacentes à ces deux tableaux, le premier point se démontre immédiatement par récurrence sur m .

Montrons les deux derniers points également par récurrence sur m . Le cas $m = 1$ est trivial. On passe facilement de m à $m+1$ en remarquant que l'on peut supposer $p_{m+1} = 1$ puisque le diagramme rectangulaire $p_{m+1} \times q_{m+1}$ est bien évidemment une image du diagramme gauche $(1 \times q_{m+1}) * \dots * (1 \times q_{m+1})$. Il

existe alors une partition α image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ telle que ν soit une image du diagramme gauche $\alpha * (1 \times q_{m+1})$. Le diagramme ν est alors obtenu en ajoutant q_{m+1} cases au diagramme α sans jamais en mettre deux dans la même colonne. Or d'après l'hypothèse de récurrence, $\alpha_{p_1+\dots+p_m} \leq q_1$ et si $\alpha_{p_1+\dots+p_m} \neq 0$ alors $\alpha_1 < q_1 + \dots + q_m$. On ne peut donc pas rajouter plus de q_1 cases à la $(p_1 + \dots + p_m + 1)$ -ième ligne (qui est vide) du diagramme α . Donc $\nu_{p_1+\dots+p_m+1} \leq q_1$. Enfin, on montre de même que si $\nu_{p_1+\dots+p_m+1} \neq 0$ alors $\nu_1 < q_1 + \dots + q_m$. Ce qui conclut la récurrence et la démonstration du lemme 27.

Continuons la démonstration du corollaire, d'après [7, Proposition 2.3] le critère du théorème de Venkataramana que l'on a utilisé dans la démonstration

Remarquons enfin que d'après le lemme 27 la partition $(p, p-1, \dots, 1)$ ne peut être image d'un diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ avec $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq p$. Dans le cas où $H^{\text{nc}} = O^*(2p)$, le critère d'injectivité de l'application de restriction stable que l'on obtiendrait en suivant la même méthode serait vide, ou presque puisqu'il permet quand même de retrouver le résultat suivant de Clozel et Venkataramana :

Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$ avec $H^{\text{nc}} = O^(2p)$ et $p = q$. Alors, l'application*

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H)$$

de restriction stable est identiquement nulle en restriction à la cohomologie holomorphe de degré strictement positif.

Concluons cette section par une réciproque partielle au théorème 25, un critère d'annulation de l'application de restriction.

Théorème 31 *Soient $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$ avec $H = H_1 \times \dots \times H_m$, $H_i^{\text{nc}} = U(p_i, q_i)$, $p_i, q_i \geq 1$, $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Fixons pour chaque entier $i = 1, \dots, m$, un couple compatible de partitions (λ_i, μ_i) dans $p_i \times q_i$. Supposons*

$$c_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^\lambda c_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_m}^{\hat{\mu}} = 0.$$

*(Autrement dit, supposons soit que λ n'est pas une image du diagramme gauche $\lambda_1 * \dots * \lambda_m$ soit que $\hat{\mu}$ n'est pas une image du diagramme gauche $\hat{\mu}_1 * \dots * \hat{\mu}_m$.)*

Alors, la projection de l'image de l'application de restriction

$$\text{res}_H^G : H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G) \rightarrow H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(Sh^0 H)$$

dans la composante de Künneth

$$H^{\lambda_1, \mu_1}(Sh^0 H_1) \otimes \dots \otimes H^{\lambda_m, \mu_m}(Sh^0 H_m)$$

est nulle.

Démonstration. Remarquons que l'on peut supposer $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_m| = |\lambda|$ et $|\hat{\mu}_1| + \dots + |\hat{\mu}_m| = |\hat{\mu}|$. Supposons par exemple $c_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^\lambda = 0$ (la démonstration serait similaire dans le cas $c_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_m}^{\hat{\mu}} = 0$). D'après la formule de Matsushima, si s est une classe de cohomologie,

$$s \in \text{Hom}_K(V(\lambda, \mu), C^\infty(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))),$$

où, rappelons le, $V(\lambda, \mu) \subset \bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}^-$.

Notons \mathfrak{p}_H^\pm les espaces $\mathfrak{p}^\pm \cap \mathfrak{h}$.

La restriction $\text{res}_H^G(s)$ de s à la sous-variété $Sh^0 H$ est (représentée par) une forme différentielle fermée qui appartient à

$$\text{Hom}_K\left(\bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^-, C^\infty(H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{A}))\right),$$

et est obtenue par la formule :

$$\text{res}_H^G(s)(\xi) = s(\text{pr}_{V(\lambda, \mu)}(\xi)) \quad (\text{pour tout } \xi \in \bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^-)$$

où $\text{pr}_{V(\lambda, \mu)} : \bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^- \rightarrow V(\lambda, \mu)$ est une projection K -équivariante.

La formule de Künneth correspond à la décomposition de $\bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^-$ en :

$$\bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^- = \bigoplus_{\substack{k_1 + \dots + k_m = |\lambda| \\ l_1 + \dots + l_m = |\hat{\mu}|}} \left(\bigwedge^{k_1} \mathfrak{p}_{H_1}^+ \otimes \bigwedge^{l_1} \mathfrak{p}_{H_1}^- \right) \otimes \dots \otimes \left(\bigwedge^{k_m} \mathfrak{p}_{H_m}^+ \otimes \bigwedge^{l_m} \mathfrak{p}_{H_m}^- \right).$$

L'espace $V(\lambda_1, \mu_1) \otimes \dots \otimes V(\lambda_m, \mu_m)$ est inclus dans $\bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}_H^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}_H^-$. Le théorème 31 découlera de la démonstration de

$$\text{pr}_{V(\lambda, \mu)}(V(\lambda_1, \mu_1) \otimes \dots \otimes V(\lambda_m, \mu_m)) = 0. \quad (46)$$

Mais pour chaque entier $i = 1, \dots, m$, le sous-espace $V(\lambda_i, \mu_i)$ est inclus dans

$$V(\lambda_i) \otimes V(\hat{\mu}_i)^* \subset \bigwedge^{|\lambda_i|} \mathfrak{p}_{H_i}^+ \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}_i|} \mathfrak{p}_{H_i}^-.$$

Soit $F(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ le K -module engendré par $V(\lambda_1) \otimes \dots \otimes V(\lambda_m) \subset \bigwedge^{|\lambda|} \mathfrak{p}^+$. Pour démontrer (46), il nous suffit alors de démontrer que :

$$\text{Hom}_K(V(\lambda), F(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = 0. \quad (47)$$

Puisque le K -module $V(\lambda)$ et le K_H -module $V(\lambda_1) \otimes \dots \otimes V(\lambda_m)$ sont tous deux irréductibles, (47) est équivalent à :

$$\text{Hom}_{K_H}(V(\lambda_1) \otimes \dots \otimes V(\lambda_m), V(\lambda)) = 0. \quad (48)$$

Or lorsque $m = 2$ et d'après [9, (20) p.122], vu comme $(K_H = K_{H_1} \times K_{H_2})$ -module $V(\lambda)$ contient un sous-module irréductible isomorphe au module $V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_2)$ si et seulement si $c_{\lambda_1 \lambda_2}^\lambda \neq 0$. On conclut alors la démonstration du théorème 31 par récurrence sur m et à l'aide du lemme 10.

1.4 Exemples et applications

Concluons cette première partie par l'étude de quelques familles d'exemples. L'application de restriction stable de la cohomologie de $Sh^0 G$ vers la cohomologie de ses sous-variétés de Shimura est simple à comprendre en petit degré en raison du fait évident suivant.

Fait 32 Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions incluses dans $p \times q$. Supposons le diagramme gauche $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Supposons $|\lambda| + |\hat{\mu}| < 3p - 2$ si $q = p$ et $|\lambda| + |\hat{\mu}| < p + q - 1$ si $q > p$. Alors (l'entier m est nécessairement ≤ 2 et) soit $p_1 + \dots + p_m = p$, soit $q_1 + \dots + q_m = q$, soit $p = q$, $m = 1$ et $p_1 = q_1 = p - 1$.

En effet, remarquons que puisque chaque p_i et chaque q_i est ≥ 1 , si $p_1 + \dots + p_m \leq p - 1$ et $q_1 + \dots + q_m \leq q - 1$ nous devons avoir $p_1 q_1 + \dots + p_m q_m \leq (p - m)(q - m) + m - 1$ et donc $|\lambda| + |\hat{\mu}| \geq pq - (p - m)(q - m) - m + 1 = m(p + q) - m^2 - m + 1$. Il est alors facile de vérifier que $|\lambda| + |\hat{\mu}| (\geq m(p + q) - m^2 - m + 1) \geq p + q - 1$ avec égalité si et seulement si $m = 1$, $p_1 = p - 1$ et $q_1 = q - 1$. Enfin, si $p = q$ et $m > 1$ ou $p_1 < p - 1$ ou $q_1 < q - 1$, $|\lambda| + |\hat{\mu}| (\geq 2mp - m^2 - m + 1) \geq 3p - 2$. Ce qui conclut la démonstration du fait.

On déduit facilement du fait 32 et des théorèmes 25 et 29 la démonstration du théorème 4 que l'on reformule de la façon suivante.

Théorème 4' *Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(p, q)$ avec $1 \leq p \leq q$. Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, pour tout sous-espace de cohomologie fortement primitive $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$, de degré $|\lambda| + |\hat{\mu}| < 3p - 2$ si $p = q$ et $|\lambda| + |\hat{\mu}| < p + q - 1$ si $p < q$, de la variété de Shimura $Sh^0 G$, il existe une sous-variété de Shimura $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ telle que l'application de restriction stable*

$$\text{Res}_H^G : H^k(Sh^0 G) \rightarrow H^k(Sh^0 H)$$

soit injective en restriction à $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 H)$.

Démonstration. Supposons comme d'habitude le diagramme gauche μ/λ égal à $(p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Sous les hypothèses du théorème sur le degré $|\lambda| + |\hat{\mu}|$, et d'après le fait 32, soit $p_1 + \dots + p_m = p$ et dans ce cas d'après le théorème 25 on peut prendre n'importe quelle sous-variété $Sh^0 H$ avec $H^{\text{nc}} = U(p, q - 1)$, soit $q_1 + \dots + q_m = q$ et dans ce cas d'après le théorème 25 on peut prendre n'importe quelle sous-variété $Sh^0 H$ avec $H^{\text{nc}} = U(p - 1, q)$, soit $p = q$ et le diagramme gauche μ/λ est rectangulaire égal à $(p - 1) \times (q - 1)$ et dans ce cas d'après le théorème 29 on peut prendre n'importe quelle sous-variété $Sh^0 H$ avec $H^{\text{nc}} = GSp_p$.

Remarquons avec Venkataramana que l'on ne peut espérer répondre positivement à la question d'Arthur simplement à coup de restriction à des sous-variétés de Shimura. On peut plus généralement montrer le résultat suivant qui montre qu'en un certain sens le théorème 4 est optimal.

Proposition 33 *Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(p, q)$ avec $1 \leq p \leq q$. Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, il existe une classe de cohomologie (holomorphe) **non triviale** et de degré $3p - 2$ si $p = q$ et $p + q - 1$ si $p < q$, dont la restriction stable à n'importe quelle sous-variété de Shimura $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ soit **nulle**.*

Démonstration. Lorsque $q > p$, il suffit de considérer une classe de cohomologie holomorphe non nulle dans $H^{(1,1),0}(Sh^0 G)$, une telle classe existe d'après un théorème d'Anderson [1] (dans [15] Li généralise amplement ce théorème⁶). On

⁶Précisément, Li montre que $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ est non trivial lorsque le diagramme gauche μ/λ est rectangulaire.

a classifié toutes les sous-variétés de Shimura possible de Sh^0G (cf. proposition 19) et d'après les résultats de Clozel et Venkataramana redémontrés dans la section précédente, la restriction stable de cette classe à n'importe quelle sous-variété de Shimura est nulle.

Lorsque $q = p$, il suffit par exemple de considérer une classe de cohomologie holomorphe non nulle dans $H^{(2,1),0}(Sh^0G)$. Là encore, une telle classe existe d'après [1]. D'après les résultats de Clozel et Venkataramana et la classification des sous-variétés de Shimura de Sh^0G , la restriction stable de cette classe à n'importe quelle sous-variété de Shimura est nulle.

Remarquons maintenant qu'à partir d'une idée de Venkataramana, les théorèmes 25 et 31 permettent de démontrer le théorème 5 dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

Théorème 5 *Soient K un corps de nombre totalement réel et G' un groupe unitaire anisotrope sur K compact à toutes les places infinies sauf une où il est isomorphe à $U(p, q)$ avec $3 \leq 2p + 1 \leq q$. Soit G le groupe algébrique sur \mathbb{Q} obtenu à partir de G' par restriction des scalaires de K à \mathbb{Q} . Alors, toute classe de Hodge dans $H^{2pq-2p}(Sh^0G)$ est algébrique.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $q \geq 2p + 1$, la cohomologie de bidegré (p, p) de Sh^0G est somme directe de la cohomologie invariante $\oplus_{|\nu|=p} \mathbb{C}\eta(C_\nu)$ (où ν désigne une partition) et de la cohomologie fortement primitive $H^{(p \times 1), (p \times (q-1))}(Sh^0G)$.

Il est classique que les classes $\eta(C_\nu)$ sont algébriques. Nous ne nous occupons donc que de la partie non invariante $H_{n.i.}^*(Sh^0G)$ (fortement primitive) de la cohomologie.

Considérons une sous-variété de Shimura $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = H_1 \times \dots \times H_p$ et chaque $H_i^{nc} = U(1, 2)$ (une telle sous-variété existe puisque G provient d'un groupe unitaire sur un corps de nombre). Puisque $q \geq 2p + 1$ et d'après le théorème 25 (et le lemme 28), l'application de restriction stable Res_H^G est injective en restriction à $H^{(p \times 1), (p \times (q-1))}(Sh^0G)$.

Mais, d'après le théorème 31, l'image $\text{Res}_H^G(H^{(p \times 1), (p \times (q-1))}(Sh^0G))$ est contenue dans la composante de Künneth $\prod_{G(\mathbb{Q})} H^{1,1}(Sh^0H_1) \otimes \dots \otimes H^{1,1}(Sh^0H_p)$ de $\prod_{G(\mathbb{Q})} H^{p,p}(Sh^0H)$. Le théorème de Lefschetz sur les classes de bidegré $(1, 1)$ implique alors que la restriction stable $\text{Res}_H^G(\alpha)$ de toute classe $\alpha \in H^{(p \times 1), (p \times (q-1))}(Sh^0G)$ appartient au sous-espace engendré par les translatés de Hecke de classes $[S_1 \times \dots \times S_p]$, où chaque S_i est une courbe dans Sh^0H_i ⁷.

D'après l'injectivité de l'application de restriction stable, une classe $\alpha \in H^{(p \times 1), (p \times (q-1))}(Sh^0G)$ est triviale si et seulement si $g\alpha \wedge [V] = 0$ pour toute sous-variété algébrique V de Sh^0H et pour tout $g \in G(\mathbb{Q})$. Or les $G(\mathbb{Q})$ -modules $H_{n.i.}^{2p}(Sh^0G)$ et $H_{n.i.}^{2pq-2p}(Sh^0G)$ sont en dualité (déduite de la dualité de Poincaré). L'espace engendré par les translatés de Hecke dans Sh^0G des classes $[V]$ de sous-variétés algébriques de Sh^0H contient donc l'espace $H_{n.i.}^{2pq-2p}(Sh^0G) \cap H^{pq-p, pq-p}(Sh^0G)$. Ce qui prouve que toute classe de Hodge dans $H^{2pq-2p}(Sh^0G)$ est algébrique.

Concluons cette partie en remarquant que le théorème 25 implique immédiatement, à l'aide des théorèmes de Clozel contenus dans [6], de nouveaux résultats

⁷Remarquons que S_i n'est pas nécessairement une sous-variété de Shimura.

d'annulation de la cohomologie de certaines variétés de Shimura unitaires. Nous nous contenterons d'énoncer un résultat particulier mais suffisamment frappant, renvoyant le lecteur à [6] pour déduire du théorème 25 des énoncés plus généraux.

Théorème 34 *Supposons que Sh^0G contienne une sous-variété de Shimura Sh^0H , avec H obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe $U(D)$ où D est une algèbre à division de degré premier impair sur une extension quadratique imaginaire d'un corps de nombre totalement réel et tel que $H^{nc} = U(p-a, q)$ (resp. $= U(p, q-b)$) avec $a \geq 1$ (resp. $b \geq 1$). Soit (λ, μ) un couple de partitions compatible de diagramme gauche $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Supposons que*

- $q_1 + \dots + q_m = q$ (resp. $p_1 + \dots + p_m = p$),
- $p_i \geq a$ (resp. $q_i \geq b$) pour chaque $i = 1, \dots, m$, et
- $|\lambda| + |\mu| < pq - aq$ (resp. $< pq - bp$).

Alors, $H^{\lambda, \mu}(Sh^0G) = 0$.

On vérifiera facilement que ce dernier résultat implique le théorème 6 annoncé en introduction.

2 Cas des variétés de Shimura associé au groupe GS_p

Dans cette partie G est un groupe algébrique réductif connexe et anisotrope sur \mathbb{Q} avec $G^{nc} = GS_p$, où p est un entier strictement positif. Rappelons alors que

$$G^{nc} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p, p) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (49)$$

Soit K le groupe $U(p)$ plongé dans G^{nc} via l'application

$$k \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & {}^t k^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le complexifié $K_{\mathbb{C}}$ est le groupe GL_p . L'involution de Cartan θ est donnée par $x \mapsto -{}^t \bar{x}$. Soit T le sous-groupe de $K_{\mathbb{C}}$ constitué des matrices diagonales.

Comme dans la première partie, nous noterons $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \dots$ les algèbres de Lie de G^{nc}, K, \dots et $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \dots$ leur complexifications. Nous noterons $(x_1, \dots, x_p; -x_1, \dots, -x_p)$ les éléments de l'algèbre de Lie de T (vus comme éléments de \mathfrak{g}).

Dans l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} , on a :

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p \times p}(\mathbb{C}) \text{ symétrique} \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{p \times p}(\mathbb{C}) \text{ symétrique} \right\}.$$

Nous noterons $E = \mathbb{C}^p$ la représentation standard de $U(p)$. Alors, comme nous l'avons déjà remarqué au cours de la première partie, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = \text{sym}^2(E)$. De la même manière, $\mathfrak{p}^- = \text{sym}^2(E^*)$.

Soit (e_1, \dots, e_p) la base canonique de E . Choisissons comme sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}_K dans \mathfrak{k} l'algèbre des matrices dans \mathfrak{k} qui sont triangulaires supérieures sur E par rapport à cette base. Alors l'ensemble des racines simples compactes positives

$$\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t}) = \{x_i - x_j : 1 \leq i < j \leq p\}. \quad (50)$$

Les racines simples positives de T apparaissant dans \mathfrak{p}^+ sont les formes linéaires $x_i + x_j$ avec $1 \leq i \leq j \leq p$. Dans la suite nous noterons $e_{i,j} = e_i \cdot e_j$ la base canonique de $\text{sym}^2(E)$. (Vue comme matrice symétrique l'élément $e_{i,j}$ est donc égal à $E_{i,j} + E_{j,i}$.)

2.1 Décomposition “à la Lefschetz” de la cohomologie

Modules cohomologiques et diagrammes de Young

Nous avons vu dans la première partie comment associer une sous-algèbre parabolique θ -stable \mathfrak{q} à un élément $X = (x_1, \dots, x_p; -x_1, \dots, -x_p) \in \mathfrak{it}_0$ (les x_i sont donc tous réels). Rappelons le choix fixé (50) de racines simples compactes positives. Après conjugaison par un élément de K , on peut supposer, et nous le supposerons effectivement par la suite, que X est dominant par rapport à $\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$, i.e. que $\alpha(X) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$; il satisfait alors aux inégalités

$$x_1 \geq \dots \geq x_p.$$

Nous associons maintenant à notre élément $X \in \mathfrak{it}_0$ un couple (λ, μ) de partitions comme suit.

- La partition $\lambda \subset p \times p$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times p$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i + x_j > 0$.
- La partition $\mu \subset p \times p$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times p$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i + x_j \geq 0$.

Il est immédiat que le couple de partitions (λ, μ) ainsi défini est compatible, que $(\lambda^*, \mu^*) = (\lambda, \mu)$ et que, réciproquement, tout couple de partitions compatible dans $p \times p$ et vérifiant $(\lambda^*, \mu^*) = (\lambda, \mu)$ est associé à un élément X dans \mathfrak{it}_0 .

Nous dirons d'une partition λ qu'elle est *symétrique* si $\lambda^* = \lambda$. Remarquons que si (λ, μ) est un couple compatible de partitions symétriques dans $p \times p$, le diagramme gauche μ/λ est symétrique et s'écrit donc $(a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$ pour un certain $m \geq 1$ et des entiers a_i, b_i et $p_0 \geq 1$.

Comme dans la première partie, on déduit alors de la remarque suivant la définition des modules $A_{\mathfrak{q}}$ que chaque couple compatible de partitions symétriques (λ, μ) définit sans ambiguïté une classe d'équivalence de (\mathfrak{g}, K) -modules que nous noterons $A(\lambda, \mu)$. Nous nous autoriserons encore à parler de “la” sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}(\lambda, \mu) = \mathfrak{l}(\lambda, \mu) \oplus \mathfrak{u}(\lambda, \mu)$ de (\mathfrak{g}, K) -module associé $A(\lambda, \mu)$, l'important pour nous est qu'une telle sous-algèbre existe. Nous supposerons

de plus, ce que l'on peut toujours faire, que le groupe $L(\lambda, \mu)$ associé à la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}(\lambda, \mu)$ n'a pas de facteurs compacts non abélien. Il est alors facile de voir que

$$L(\lambda, \mu)/(L(\lambda, \mu) \cap K) = GSp_{p_0}/U(p_0) \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)/U(a_i) \times U(b_i), \quad (51)$$

où le plongement du groupe $GSp_{p_0} \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)$ dans GSp_p est (à conjugaison dans GSp_p près) induit par le plongement

$$\begin{aligned} U(p_0, p_0) \times U(a_1, b_1) \times \dots \times U(a_m, b_m) &\longrightarrow U(p, p) \\ (g_0, g_1, \dots, g_m) &\longmapsto (g_0, g_1, \tilde{g}_1, \dots, g_m, \tilde{g}_m, id). \end{aligned}$$

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman décrits dans la première partie affirment alors que

$$\hat{G}_{VZ}^{\text{nc}} := \{A(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \text{ compatible et } \lambda, \mu \text{ symétriques}\}$$

est l'ensemble des (\mathfrak{g}, K) -modules ayant des groupes de (\mathfrak{g}, K) -cohomologie non nuls.

Étant donné une partition symétrique $\lambda \subset p \times p$, nous noterons λ^+ la partition $(\lambda_1^+, \dots, \lambda_p^+)$ où pour $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= |\{j \geq i : (i, j) \in \lambda\}|, \\ &= \max(0, \lambda_i - i + 1). \end{aligned}$$

Nous noterons $\bar{\lambda}$ le diagramme de Young $\subset p \times (p+1)$ obtenu en rajoutant une case à chaque ligne intersectant la diagonale. Remarquons alors que $|\bar{\lambda}|$ est nécessairement pair égal à $2|\lambda^+|$. Si (λ, μ) est un couple compatible de partitions symétriques $\subset p \times p$ dont le diagramme gauche associé $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$, nous noterons enfin $(\mu/\lambda)^+$ le sous-diagramme gauche égal à $(p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$.

Considérons maintenant la représentation de K_C

$$V(\lambda) := E^{\bar{\lambda}}. \quad (52)$$

C'est une sous-représentation irréductible de $\bigwedge^{|\lambda^+|} \text{sym}^2(E)$; son vecteur de plus haut poids est

$$v(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i}^{\lambda_i} e_{i,j} \quad (53)$$

et son vecteur de plus bas poids est

$$w(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i}^{\lambda_i} e_{p-i+1, p-j+1}. \quad (54)$$

Puisque d'après [12, Lemma 3.5] il existe une correspondance bijective entre les sous-espaces irréductibles de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ et les systèmes positifs de racines contenant l'ensemble (50), la représentation

$$\bigwedge \mathfrak{p}^+ = \bigwedge \text{sym}^2(E) = \bigoplus_{\substack{\lambda \subset p \times p \\ \lambda = \lambda^*}} V(\lambda), \quad (55)$$

où chaque sous-espace irréductible $V(\lambda)$ apparaît avec multiplicité un.

Soit maintenant (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques. Le vecteur

$$v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* \in \bigwedge^{|\lambda^+|} (\text{sym}^2(E)) \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}^+|} (\text{sym}^2(E))^* = \bigwedge^{|\lambda^+|, |\hat{\mu}^+|} \mathfrak{p} \subset \bigwedge^{|\lambda^+| + |\hat{\mu}^+|} \mathfrak{p} \quad (56)$$

est un vecteur de plus haut poids $2\rho(u(\lambda, \mu) \cap \mathfrak{p})$ et engendre donc sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$ un sous-module irréductible que l'on note $V(\lambda, \mu)$. Ce module est isomorphe à $V(\mathfrak{q}(\lambda, \mu))$.

Classes de Chern et diagrammes de Young

Considérons $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ le complexifié du groupe $G^{\text{nc}} = GSp$. Il s'identifie au sous-groupe de $GL(2p, \mathbb{C})$ constitué des transformations de \mathbb{C}^{2p} qui préservent la forme symplectique $\omega = z_1 \wedge z_{p+1} + z_2 \wedge z_{p+2} + \dots + z_p \wedge z_{2p}$. Nous noterons $GSp(p)$ le groupe compact obtenu en intersectant $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ avec $U(2p)$ (c'est un sous-groupe compact maximal).

Soit toujours $\mathbb{G}_{p,p}$ la grassmannienne des sous-espaces complexes de dimension p dans \mathbb{C}^{2p} . Le dual compact $\mathbb{G}S_p := \hat{X}_G$ de X_G s'identifie au sous-ensemble de $\mathbb{G}_{p,p}$ constitué de tous les espaces totalement isotropes (par rapport à la forme symplectique ω) de \mathbb{C}^{2p} . Le groupe $U(2p)$ agit transitivement sur $\mathbb{G}_{p,p}$, le sous-ensemble $\mathbb{G}S_p$ est une sous-variété projective lisse de $\mathbb{G}_{p,p}$ invariante sous l'action du groupe $GSp(p)$ et cette action est transitive. Soit $x_0 \in \mathbb{G}S_p$ le point correspondant au sous-espace de dimension p de \mathbb{C}^{2p} constitué des points dont les p dernières coordonnées sont nulles.

Soit $\nu \subset p \times p$ une partition. On lui a associé dans la première partie une classe $C_\nu \in H^*(\mathbb{G}_{p,p})$. Nous noterons dorénavant C_ν^{Gr} ces classes de cohomologie. Rappelons que pour tout entier $k \geq 1$, la classe de cohomologie $C_{(1^k)}^{\text{Gr}}$ (resp. $C_{(k)}^{\text{Gr}}$) est un multiple non nul de la k -ième classe de Chern \hat{C}_k (resp. \hat{C}'_k) du fibré \hat{T} (resp. \hat{Q}) sur la grassmannienne $\mathbb{G}_{p,p}$.

En utilisant (55) et son dualisé :

$$\bigwedge \mathfrak{p} = \bigoplus_{\substack{\lambda \subset p \times p \\ \lambda = \lambda^*}} V(\lambda)^*,$$

on peut décrire une base $\{C_\nu : \nu \subset p \times p, \nu^* = \nu\}$ de l'espace $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ des vecteurs K -invariants de $\bigwedge \mathfrak{p}$ paramétrée par l'ensemble des partitions symétriques $\nu \subset p \times p$. On prend $C_\nu := \sum_l z_l \otimes z_l^*$ où $\{z_l\}$ est une base de $V(\nu) \subset \bigwedge \mathfrak{p}^+$ et $\{z_l^*\}$ la base duale de $V(\nu)^* \subset \bigwedge \mathfrak{p}^-$.

Soit $\nu \subset p \times p$ une partition symétrique. Le théorème déjà mentionné dans la première partie identifie $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ et $H^*(\mathbb{G}S_p)$. On peut donc voir C_ν comme une classe de cohomologie dans $H^*(\mathbb{G}S_p)$.

Le plongement $\mathbb{G}S_p \rightarrow \mathbb{G}_{p,p}$ induit l'application (de restriction) $H^*(\mathbb{G}_{p,p}) \rightarrow H^*(\mathbb{G}S_p)$ en cohomologie.

Proposition 35 *Soit $\lambda \subset p \times p$ une partition. L'image de C_λ^{Gr} dans $H^*(\mathbb{G}S_p)$ par l'application de restriction $H^*(\mathbb{G}_{p,p}) \rightarrow H^*(\mathbb{G}S_p)$ est non nulle si et seulement si λ ou $\lambda^* = \nu^+$ pour une certaine partition symétrique $\nu \subset p \times p$. Et alors, l'image de C_λ^{Gr} dans $H^*(\mathbb{G}S_p)$ est égale à C_ν .*

Démonstration. Dans la suite nous aurons à considérer à la fois le cas du groupe $U(p, p)$ et du groupe GSp_p . Pour distinguer ces deux cas nous utiliserons les notations évidentes $K_{\text{Gr}}, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^-$ et $V_{\text{Gr}}(\lambda) \subset \bigwedge \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+$ lorsque nous parlerons du cas du groupe $U(p, p)$.

L'inclusion de l'espace des matrices symétriques dans l'espace de toutes les matrices induit une inclusion $\mathfrak{p}^- \rightarrow \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^-$ qui commute à l'action de K . Par dualité (pour la forme de Killing) cette inclusion induit à son tour l'application $\mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+ \rightarrow \mathfrak{p}^+$ que nous dirons "de restriction". Cette dernière application induit

$$\bigwedge \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+ \rightarrow \bigwedge \mathfrak{p}^+. \quad (57)$$

Puisque vue comme forme différentielle sur $\mathbb{G}_{p,p}$ (resp. $\mathbb{G}S_p$), la classe C_λ^{Gr} (resp. C_ν) est invariante sous l'action du groupe $U(2p)$ (resp. $GSp(p)$), il nous suffit de vérifier la proposition 35 au point base $x_0 \in \mathbb{G}S_p$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 36 *L'image de $V_{\text{Gr}}(\lambda)$ dans $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ sous l'application (57) est non triviale si et seulement si λ ou $\lambda^* = \nu^+$ pour une certaine partition symétrique $\nu \subset p \times p$. Et alors, son image est $V(\nu)$.*

Démonstration. D'après (25), $V_{\text{Gr}}(\lambda) = E^\lambda \otimes (E^{\lambda^*})^*$. Vu comme K -module, $V_{\text{Gr}}(\lambda)$ est donc égal à

$$E^\lambda \otimes E^{\lambda^*}. \quad (58)$$

Le K -module (58) se décompose en irréductible comme suit :

$$E^\lambda \otimes E^{\lambda^*} = \bigoplus_{\mu} (E^\mu)^{\oplus c_{\lambda\lambda^*}^\mu}.$$

Commençons par remarquer que si $\nu \subset p \times p$, l'image de $V_{\text{Gr}}(\nu^+)$ (resp. $V_{\text{Gr}}((\nu^+)^*)$) dans $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ sous l'application (57) est non triviale égale à $V(\nu)$. En effet, il est clair que le vecteur

$$\bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i}^{\nu_i} e_i \otimes e_j^* \left(\text{resp. } \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i}^{\nu_i} e_j \otimes e_i^* \right)$$

appartient à $V_{\text{Gr}}(\nu^+)$ (resp. $V_{\text{Gr}}((\nu^+)^*)$). Mais l'image de ce vecteur dans $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ est un multiple non nul de $v(\nu)$.

Il nous reste alors à montrer que si $\mu \subset p \times p$ est une partition telle que

- $c_{\lambda\lambda^*}^\mu \neq 0$,
- $\mu = \overline{\nu}$ pour une certaine partition symétrique $\nu \subset p \times p$, et
- l'image de $E^\mu \subset E^\lambda \otimes E^{\lambda^*}$ sous l'application (57) est non triviale,

alors λ ou $\lambda^* = \nu^+$.

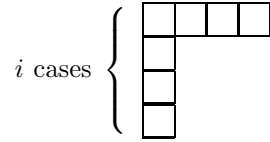
Nous le montrons en raisonnant par l'absurde. Supposons donc la partition $\mu = \overline{\nu}$ avec λ et $\lambda^* \neq \nu$. Alors, le K -module

$$(E^\lambda \otimes E^{\lambda^*}) \oplus (E^{\nu^+} \otimes E^{(\nu^+)^*})$$

apparaît comme K -sous-module de $\bigwedge(\text{sym}^2(E) \oplus \bigwedge^2 E)$. Or si un élément $x \in E^\lambda \otimes E^{\lambda^*}$ et un élément $y \in \bigwedge(E \otimes E)$ s'envoient sur un même vecteur dans $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ (sous l'application (57)) on a nécessairement $y \in (E^{\lambda^*} \otimes E^\lambda) \oplus (E^\lambda \otimes E^{\lambda^*})$. Le module $V(\mu)$ apparaît donc dans $\bigwedge \text{sym}^2(E)$ avec multiplicité ≥ 2 (puisque $c_{\nu^+(\nu^+)^*}^\mu \neq 0$ et $c_{\lambda\lambda^*}^\mu \neq 0$) ce qui contredit la décomposition (55).

Comme corollaire de la proposition 35 on retrouve (avec une démonstration similaire) un résultat de Parthasarathy. Soit \hat{T}_s le tiré en arrière du fibré tautologique sur $\mathbb{G}_{p,p}$ en un fibré sur $\mathbb{G}S_p$. Nous appellerons \hat{T}_s le *fibré tautologique* sur $\mathbb{G}S_p$. Soit $c_i(\hat{T}_s) \in H^*(\mathbb{G}S_p)$ les classes de Chern de \hat{T}_s .

Corollaire 37 *La i -ème classe de Chern $c_i(\hat{T}_s)$ du fibré tautologique \hat{T}_s sur $\mathbb{G}S_p$ est un multiple non nul de $C_{(i, 1^{i-1})}$, où $(i, 1^{i-1})$ désigne la partition symétrique de diagramme de Young associé*



Démonstration. La classe $c_i(\hat{T}_s)$ est obtenue par restriction de la i -ème classe de Chern du fibré tautologique \hat{T} sur $\mathbb{G}_{p,p}$. Cette dernière est un multiple non nul de $C_{(i)}^{\text{Gr}}$. Puisque $(i, 1^{i-1})^+ = (i)$, le corollaire 37 découle de la proposition 35.

Action des classes de Chern sur la cohomologie

Dans cette section on énonce et démontre l'analogue de la proposition 11 dans le cas du groupe symplectique.

Nous noterons \mathfrak{p}_L^+ l'intersection $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{l}(\lambda, \mu)$ et $E(G, L)$ le sous-espace de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ engendré par les translatés par K du sous-espace $\bigwedge \mathfrak{p}_L^+$.

Enfin, nous dirons qu'une partition symétrique ν s'inscrit symétriquement dans un diagramme gauche symétrique $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$ s'il existe une image de la partition ν^+ ou de sa transposée $(\nu^+)^*$ dans le diagramme gauche $(\mu/\lambda)^+$ dont le sous-diagramme contenu dans $p_0 \times p_0$ est égal à ν_0^+ ou $(\nu_0^+)^*$ pour une certaine partition symétrique $\nu_0 \subset p_0 \times p_0$.

Proposition 38 *Soient λ , μ et ν trois partitions symétriques incluses dans $p \times p$ telles que (λ, μ) forme un couple compatible. Notons $L = L(\lambda, \mu)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $C_\nu.V(\lambda, \mu) \neq 0$ dans $\bigwedge \mathfrak{p}$;
2. la partition ν s'inscrit symétriquement dans le diagramme gauche μ/λ ;
3. $V(\nu) \subset E(G, L)$.

De plus, les éléments $\{C_\nu.v(\lambda) \otimes w(\mu)^\}$, où ν décrit l'ensemble des partitions symétriques $\subset p \times p$ qui s'inscrivent symétriquement dans μ/λ , sont linéairement indépendants.*

Démonstration. La démonstration de la proposition 38 est similaire à celle de la proposition 11, les différents lemmes 12, 13 et 15 empruntés à Venkataramana sont d'ailleurs complètement généraux. La seule différence est donc dans l'étude de l'application naturelle de restriction de \hat{X}_G vers \hat{X}_L . Pour comprendre celle-ci, commençons par remarquer que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{G}_{p,p}) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{G}_{p_0,p_0}) \otimes \bigotimes_{i=1}^m H^*(\mathbb{G}_{a_i,b_i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\mathbb{G}_{S_p}) & \xrightarrow{\text{res}} & H^*(\mathbb{G}_{S_{p_0}}) \otimes \bigotimes_{i=1}^m H^*(\mathbb{G}_{a_i,b_i}), \end{array} \quad (59)$$

où l'on a conservé les notations de (51) (le plongement de \mathbb{G}_{a_i,b_i} dans $\mathbb{G}_{p,p}$ n'est donc pas standard).

Lemme 39 *Soit $\nu \subset p \times p$ une partition symétrique. Alors, l'image de C_ν par l'application de restriction en bas du diagramme commutatif (59) est une combinaison linéaire à coefficients entiers strictement positifs de*

$$C_{\nu_0} \otimes C_{\alpha_1}^{\text{Gr}} \otimes \dots \otimes C_{\alpha_m}^{\text{Gr}},$$

où $\nu_0^+ * \alpha_1 * \dots * \alpha_m$ ou $(\nu_0^+)^* * \alpha_1 * \dots * \alpha_m$, avec $\nu_0 \subset p_0 \times p_0$ symétrique et chaque $\alpha_i \subset a_i \times b_i$, est une image de ν^+ ou de sa transposée $(\nu^+)^*$.

Démonstration du lemme 39. À l'aide du diagramme (59), la démonstration du lemme 39 découle immédiatement de la formule de Whitney sur les classes de Chern, du lemme 14 et de la proposition 35.

Décomposition “à la Lefschetz”

Fixons maintenant un sous-groupe de congruence Γ dans G . Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques. Nous noterons $H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma)) = H^{|\lambda^+| + |\hat{\mu}^+|}(A(\lambda, \mu) : \Gamma)$ la $A(\lambda, \mu)$ -composante fortement primitive de la cohomologie de $S(\Gamma)$. La formule de Matsushima et la classification de Vogan-Zuckerman impliquent le théorème suivant.

Théorème 40 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G . Pour chaque couple d'entiers (i, j) avec $i + j \leq pq$, on a :*

$$H^{i,j}(S(\Gamma)) = \bigoplus_{\substack{(\lambda, \mu) \text{ couple compatible} \\ \text{de partitions symétriques} \\ |\lambda^+| \leq i, |\hat{\mu}^+| \leq j}} \bigoplus_{\substack{\nu_0 \subset p_0 \times p_0 \\ \text{symétrique} \\ \nu_i \subset b_i \times a_i \\ i = 1, \dots, m}} E_{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda, \mu}(S(\Gamma)),$$

où le diagramme gauche $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$ et chaque $E_{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$ est isomorphe à $H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$.

Là encore, cette décomposition est en général plus fine que celle induite par les classes de Chern. La démonstration du théorème 17 en remplaçant la proposition 11 par la proposition 38 implique immédiatement le théorème suivant.

Commençons par remarquer que l'orbite de $x_0 \in \mathbb{G}S_p$ sous l'action du groupe GS_p s'identifie à l'espace symétrique hermitien X_G . Le groupe GS_p agit sur $(\hat{T}_s)_{|X_G}$. En quotientant par l'action de Γ sur $(\hat{T}_s)_{|X_G}$, on obtient un fibré sur $S(\Gamma)$ que nous noterons T_s .

D'après un théorème classique de Cartan, l'espace $H^*(\mathbb{G}S_p)$ peut être identifié avec l'espace des formes différentielles $GS_p(p)$ -invariantes. Soit ω une forme différentielle $GS_p(p)$ -invariante sur $\mathbb{G}S_p$ et soit $\bar{\omega}$ une forme différentielle $GS_p(p)$ -invariante sur X_G égale à ω au point x_0 . Puisque ω est, en particulier, Γ -invariante elle induit une forme (nécessairement fermée) sur $S(\Gamma)$ qui définit donc une classe de cohomologie dans $H^*(S(\Gamma))$. On a ainsi construit une application

$$\eta : H^*(\mathbb{G}S_p) \rightarrow H^*(S(\Gamma)). \quad (60)$$

Il est bien connu que η est injective. Enfin, la i -ème classe de Chern $c_i(T_s)$ du fibré T_s est égale à $(-1)^i \eta(c_i(\hat{T}_s))$.

Théorème 41 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G et soit $\eta : H^*(\mathbb{G}S_p) \rightarrow H^*(S(\Gamma))$ l'application définie en (60). Fixons λ, μ et ν trois partitions symétriques incluses dans $p \times p$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors,*

1. *pour toute classe fortement primitive $s \in H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$, $\eta(C_\nu).s = 0$ si et seulement si la partition ν ne s'inscrit pas symétriquement dans le diagramme gauche μ/λ , et*
2. *si $s \in H^{\lambda, \mu}(S(\Gamma))$ est une classe non nulle, les éléments*

$$\{C_\nu.s : \nu \subset p \times p, \nu = \nu^*, \nu \text{ s'inscrit symétriquement dans } \mu/\lambda\}$$

sont linéairement indépendants.

En spécialisant ce théorème au cas de la cohomologie holomorphe, on retrouve un théorème de Parthasarathy [20, Theorem 4.1].

2.2 Restriction stable à une sous-variété de Shimura

Comme dans la première partie, nous pourrions classifier les différents types possibles de sous-variétés de Shimura. Nos méthodes n'apporteraient pas de résultats intéressants en dehors du cas des sous-variétés $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ avec

$$H^{\text{nc}} = GS_{p_1} \times \dots \times GS_{p_m},$$

où $p_1 + \dots + p_m \leq p$ et dont le plongement dans GS_p est induit par le plongement canonique (41) de $U(p_1, p_1) \times \dots \times U(p_m, p_m)$ dans $U(p, p)$.

Commençons par remarquer que la démonstration de la proposition 20 et le lemme 39 impliquent la proposition suivante.

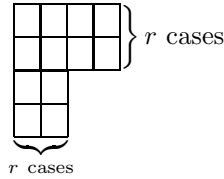
Proposition 42 *Soient p_j avec $j = 1, \dots, m$ des entiers strictement positifs tels que $p_1 + \dots + p_m \leq p$. Supposons $H^{\text{nc}} = GS_{p_1} \times \dots \times GS_{p_m}$ et plongé dans GS_p comme au-dessus. Alors, à un multiple scalaire non nul près, la classe duale $[\hat{X}_H] \in H^{\frac{p(p+1)}{2} - \sum_i \frac{p_i(p_i+1)}{2}}(\mathbb{G}S_p)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers strictement positifs des classes C_ν , où ν décrit l'ensemble des partitions symétriques $\subset p \times p$ telles que ν^+ soit l'image d'un diagramme gauche $\alpha_1 * \dots * \alpha_m$ où chaque α_i est égal au diagramme $(p_i \times q_i)^+$ ou à son transposé.*

L'analogie du théorème 25 n'est non vide que dans le cas de la cohomologie holomorphe. Nos méthodes ne permettent donc pas de démontrer de nouveaux résultats, montrons néanmoins comment retrouver les résultats de Clozel et Venkataramana.

Le sous-espace $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$ apparait dans la cohomologie holomorphe si et seulement si $\mu = p \times p$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un entier r compris entre 0 et p tel que

$$\lambda = (\underbrace{p, \dots, p}_{r \text{ fois}}, \underbrace{r, \dots, r}_{p-r \text{ fois}})$$

de diagramme de Young :



(Ici $p = 4$.)

Dans ce cas $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G) = H^{rp - \frac{r(r-1)}{2}, 0}(Sh^0 G)$ et les espaces de cohomologie holomorphe sont triviaux dans tous les autres degrés.

La démonstration du corollaire 26 se traduit facilement (à l'aide des propositions 38 et 42) pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 43 (Clozel-Venkataramana) *Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$ avec $H^{nc} = GSp_{p_1} \times \dots \times GSp_{p_m}$, $p_j \geq 1$ et $p_1 + \dots + p_m \leq p$. Soit r un entiers naturel $\leq p$. Alors, l'application*

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \rightarrow \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H)$$

*de restriction stable est **injective** en restriction à $H^{rp - \frac{r(r-1)}{2}, 0}(Sh^0 G)$ si et seulement si $p_1 + \dots + p_m = p$ et $r = 1$.*

3 Cas des variétés de Shimura associé au groupe $O^*(2p)$

Dans cette partie G est un groupe algébrique réductif connexe et anisotrope sur \mathbb{Q} avec $G^{nc} = O^*(2p)$, où p est un entier strictement positif. Rappelons alors que

$$G^{nc} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p, p) : {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (61)$$

Soit K le groupe $U(p)$ plongé dans G^{nc} via l'application

$$k \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & {}^t k^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le complexifié $K_{\mathbb{C}}$ est le groupe GL_p . L'involution de Cartan θ est donnée par $x \mapsto -{}^t\bar{x}$. Soit T le sous-groupe de $K_{\mathbb{C}}$ constitué des matrices diagonales.

Comme dans la première partie, nous noterons $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \dots$ les algèbres de Lie de G^{nc}, K, \dots et $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \dots$ leur complexifications. Nous noterons $(x_1, \dots, x_p; -x_1, \dots, -x_p)$ les éléments de l'algèbre de Lie de T (vus comme éléments de \mathfrak{g}).

Dans l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} , on a :

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p \times p}(\mathbb{C}) \text{ antisymétrique} \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{p \times p}(\mathbb{C}) \text{ antisymétrique} \right\}.$$

Nous noterons $E = \mathbb{C}^p$ la représentation standard de $U(p)$. Alors, comme nous l'avons déjà remarqué au cours de la première partie, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = \bigwedge^2(E)$. De la même manière, $\mathfrak{p}^- = \bigwedge^2(E^*)$.

Soit (e_1, \dots, e_p) la base canonique de E . Choisissons comme sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}_K dans \mathfrak{k} l'algèbre des matrices dans \mathfrak{k} qui sont triangulaires supérieures sur E par rapport à cette base. Alors l'ensemble des racines simples compactes positives

$$\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t}) = \{x_i - x_j : 1 \leq i < j \leq p\}. \quad (62)$$

Les racines simples positives de T apparaissant dans \mathfrak{p}^+ sont les formes linéaires $x_i + x_j$ avec $1 \leq i < j \leq p$. Dans la suite nous noterons $e_{i,j} = e_i \wedge e_j$ la base canonique de $\bigwedge^2(E)$. (Vue comme matrice antisymétrique l'élément $e_{i,j} = e_i \wedge e_j$ est donc égal à $E_{i,j} - E_{j,i}$.)

3.1 Décomposition “à la Lefschetz” de la cohomologie

Modules cohomologiques et diagrammes de Young

Nous avons vu dans la première partie comment associer une sous-algèbre parabolique θ -stable \mathfrak{q} à un élément $X = (x_1, \dots, x_p; -x_1, \dots, -x_p) \in i\mathfrak{t}_0$ (les x_i sont donc tous réels). Rappelons le choix fixé (62) de racines simples compactes positives. Après conjugaison par un élément de K , on peut supposer, et nous le supposerons effectivement par la suite, que X est dominant par rapport à $\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$, *i.e.* que $\alpha(X) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$; il satisfait alors aux inégalités

$$x_1 \geq \dots \geq x_p.$$

Nous associons maintenant à notre élément $X \in i\mathfrak{t}_0$ un couple (λ, μ) de partitions comme suit.

- La partition $\lambda \subset p \times p$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times p$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i + x_j > 0$.
- La partition $\mu \subset p \times p$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times p$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i + x_j \geq 0$.

Il est immédiat que le couple (λ, μ) est un couple compatible de partitions symétriques et que, réciproquement, tout couple compatible de partitions symétriques dans $p \times p$ est associé à un élément X dans $i\mathfrak{t}_0$.

Étant donnée une partition symétrique $\lambda \subset p \times p$, nous noterons λ^- la partition $(\lambda_1^-, \dots, \lambda_p^-)$ où pour $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned}\lambda_i^- &= |\{j > i : (i, j) \in \lambda\}|, \\ &= \max(0, \lambda_i - i).\end{aligned}$$

Nous noterons $\check{\lambda}$ le diagramme de Young $\subset p \times p$ obtenu en soustrayant une case à chaque ligne intersectant la diagonale. Remarquons alors que $|\check{\lambda}|$ est nécessairement pair égal à $2|\lambda^-|$.

Comme dans la première partie, on déduit alors de la remarque suivant la définition des modules $A_{\mathfrak{q}}$ que chaque couple de partitions (λ^-, μ^-) associé à un couple compatible (λ, μ) de partitions symétriques définit sans ambiguïté une classe d'équivalence de (\mathfrak{g}, K) -modules que nous noterons $A(\lambda^-, \mu^-)$. Nous nous autoriserons encore à parler de “la” sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}(\lambda^-, \mu^-) = \mathfrak{l}(\lambda^-, \mu^-) \oplus \mathfrak{u}(\lambda^-, \mu^-)$ de (\mathfrak{g}, K) -module associé $A(\lambda^-, \mu^-)$, l'important pour nous est qu'une telle sous-algèbre existe. Nous supposons de plus, ce que l'on peut toujours faire, que le groupe $L(\lambda^-, \mu^-)$ associé à la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}(\lambda^-, \mu^-)$ n'a pas de facteurs compacts non abélien. Il est alors facile de voir que

$$L(\lambda, \mu)/(L(\lambda, \mu) \cap K) = O^*(2p_0)/U(p_0) \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)/U(a_i) \times U(b_i), \quad (63)$$

où le plongement du groupe $O^*(2p_0) \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)$ dans $O^*(2p)$ est (à conjugaison dans $O^*(2p)$ près) induit par le plongement

$$\begin{aligned}U(p_0, p_0) \times U(a_1, b_1) \times \dots \times U(a_m, b_m) &\longrightarrow U(p, p) \\ (g_0, g_1, \dots, g_m) &\longmapsto (g_0, g_1, \tilde{g}_1, \dots, g_m, \tilde{g}_m, id).\end{aligned}$$

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman décrits dans la première partie affirment alors que

$$\hat{G}_{VZ}^{\text{nc}} := \{A(\lambda^-, \mu^-) : (\lambda, \mu) \text{ compatible et } \lambda, \mu \text{ symétriques}\}$$

est l'ensemble des (\mathfrak{g}, K) -modules ayant des groupes de (\mathfrak{g}, K) -cohomologie non nuls.

Étant donnée une partition symétrique $\lambda \subset p \times p$, considérons maintenant la représentation de $K_{\mathbb{C}}$

$$V(\lambda^-) := E^{\check{\lambda}}. \quad (64)$$

C'est une sous-représentation irréductible de $\bigwedge^{|\lambda^-|} \left(\bigwedge^2(E) \right)$; son vecteur de plus haut poids est

$$v(\lambda^-) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i+1}^{\lambda_i} e_{i,j} \quad (65)$$

et son vecteur de plus bas poids est

$$w(\lambda^-) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=i+1}^{\lambda_i} e_{p-i+1, p-j+1}. \quad (66)$$

Puisque d'après [12, Lemma 3.5] il existe une correspondance bijective entre les sous-espaces irréductibles de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ et les systèmes positifs de racines contenant l'ensemble (62), la représentation

$$\bigwedge \mathfrak{p}^+ = \bigwedge \left(\bigwedge^2(E) \right) = \bigoplus_{\substack{\lambda^- \\ \lambda \subset p \times p \\ \lambda = \lambda^*}} V(\lambda^-), \quad (67)$$

où chaque sous-espace irréductible $V(\lambda^-)$ apparaît avec multiplicité un.

Soit maintenant (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques. Le vecteur

$$v(\lambda^-) \otimes w(\hat{\mu}^-)^* \in \bigwedge^{| \lambda^- |} \left(\bigwedge^2(E) \right) \otimes \bigwedge^{| \hat{\mu}^- |} \left(\bigwedge^2(E) \right)^* = \bigwedge^{| \lambda^- |, | \hat{\mu}^- |} \mathfrak{p} \subset \bigwedge^{| \lambda^- | + | \hat{\mu}^- |} \mathfrak{p} \quad (68)$$

est un vecteur de plus haut poids $2\rho(u(\lambda^-, \mu^-) \cap \mathfrak{p})$ et engendre donc sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$ un sous-module irréductible que l'on note $V(\lambda^-, \mu^-)$. Ce module est isomorphe à $V(\mathfrak{q}(\lambda^-, \mu^-))$.

Classes de Chern et diagrammes de Young

Considérons $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ le complexifié du groupe $G^{\text{nc}} = O^*(2p)$. Il s'identifie au sous-groupe de $GL(2p, \mathbb{C})$ constitué des transformations de \mathbb{C}^{2p} qui préservent la forme quadratique $\omega = z_1 z_{p+1} + z_2 z_{p+2} + \dots + z_p z_{2p}$. Nous noterons $O(2p)$ le groupe compact obtenu en intersectant $G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}}$ avec $U(2p)$ (c'est un sous-groupe compact maximal).

Soit toujours $\mathbb{G}_{p,p}$ la grassmannienne des sous-espaces complexes de dimension p dans \mathbb{C}^{2p} . Le dual compact $\mathbb{G}O_p := \hat{X}_G$ de X_G s'identifie au sous-ensemble de $\mathbb{G}_{p,p}$ constitué de tous les espaces totalement isotropes (par rapport à la forme quadratique ω) de \mathbb{C}^{2p} . Le groupe $U(2p)$ agit transitivement sur $\mathbb{G}_{p,p}$, le sous-ensemble $\mathbb{G}O_p$ est une sous-variété projective lisse de $\mathbb{G}_{p,p}$ invariante sous l'action du groupe $O(2p)$ et cette action est transitive. Soit $x_0 \in \mathbb{G}O_p$ le point correspondant au sous-espace de dimension p de \mathbb{C}^{2p} constitué des points dont les p dernières coordonnées sont nulles.

Soit $\nu \subset p \times p$ une partition. On lui a associé dans la première partie une classe $C_\nu \in H^*(\mathbb{G}_{p,p})$. Nous noterons dorénavant C_ν^{Gr} ces classes de cohomologie. Rappelons que pour tout entier $k \geq 1$, la classe de cohomologie $C_{(1^k)}^{\text{Gr}}$ (resp. $C_{(k)}^{\text{Gr}}$) est un multiple non nul de la k -ième classe de Chern \hat{C}_k (resp. \hat{C}'_k) du fibré \hat{T} (resp. \hat{Q}) sur la grassmannienne $\mathbb{G}_{p,p}$.

En utilisant (67) et son dualisé :

$$\bigwedge \mathfrak{p} = \bigoplus_{\substack{\lambda^- \\ \lambda \subset p \times p \\ \lambda = \lambda^*}} V(\lambda^-)^*,$$

on peut décrire une base $\{C_{\nu^-} : \nu \subset p \times p, \nu^* = \nu\}$ de l'espace $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ des vecteurs K -invariants de $\bigwedge \mathfrak{p}$ paramétrée par l'ensemble des partitions ν^- où ν

est une partition symétrique $\subset p \times p$. On prend $C_{\nu^-} := \sum_l z_l \otimes z_l^*$ où $\{z_l\}$ est une base de $V(\nu^-) \subset \bigwedge \mathfrak{p}^+$ et $\{z_l^*\}$ la base duale de $V(\nu^-)^* \subset \bigwedge \mathfrak{p}^-$.

Soit $\nu \subset p \times p$ une partition symétrique. Le théorème déjà mentionné dans la première partie identifie $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ et $H^*(\mathbb{G}O_p)$. On peut donc voir C_{ν^-} comme une classe de cohomologie dans $H^*(\mathbb{G}O_p)$.

Le plongement $\mathbb{G}O_p \rightarrow \mathbb{G}_{p,p}$ induit l'application (de restriction) $H^*(\mathbb{G}_{p,p}) \rightarrow H^*(\mathbb{G}O_p)$ en cohomologie.

Proposition 44 *Soit $\lambda \subset p \times p$ une partition. L'image de C_λ^{Gr} dans $H^*(\mathbb{G}O_p)$ par l'application de restriction $H^*(\mathbb{G}_{p,p}) \rightarrow H^*(\mathbb{G}O_p)$ est non nulle si et seulement si λ ou $\lambda^* = \nu^-$ pour une certaine partition symétrique $\nu \subset p \times p$. Et alors, l'image de C_λ^{Gr} dans $H^*(\mathbb{G}S_p)$ est égale à C_{ν^-} .*

Démonstration. Dans la suite nous aurons à considérer à la fois le cas du groupe $U(p, p)$ et du groupe $O^*(2p)$. Pour distinguer ces deux cas nous utiliserons les notations $K_{\text{Gr}}, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+, \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^-$ et $V_{\text{Gr}}(\lambda)$ comme dans la deuxième partie.

L'inclusion de l'espace des matrices antisymétriques dans l'espace de toutes les matrices induit une inclusion $\mathfrak{p}^- \rightarrow \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^-$ qui commute à l'action de K . Par dualité (pour la forme de Killing) cette inclusion induit à son tour l'application $\mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+ \rightarrow \mathfrak{p}^+$ que nous dirons “de restriction”. Cette dernière application induit

$$\bigwedge \mathfrak{p}_{\text{Gr}}^+ \rightarrow \bigwedge \mathfrak{p}^+. \quad (69)$$

Comme dans la démonstration de la proposition 35, il nous suffit de vérifier la proposition 44 au point base $x_0 \in \mathbb{G}O_p$. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration est similaire à celle du lemme 36.

Lemme 45 *L'image de $V_{\text{Gr}}(\lambda)$ dans $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ sous l'application (69) est non triviale si et seulement si λ ou $\lambda^* = \nu^-$ pour une certaine partition symétrique $\nu \subset p \times p$. Et alors, son image est $V(\nu^-)$.*

Soit \hat{T}_o le tiré en arrière du fibré tautologique sur $\mathbb{G}_{p,p}$ en un fibré sur $\mathbb{G}O_p$. Nous appellerons \hat{T}_o le *fibré tautologique* sur $\mathbb{G}O_p$. Soit $c_i(\hat{T}_o) \in H^*(\mathbb{G}O_p)$ les classes de Chern de \hat{T}_o .

Corollaire 46 *La i -ème classe de Chern $c_i(\hat{T}_o)$ du fibré tautologique \hat{T}_o sur $\mathbb{G}O_p$ est un multiple non nul de $C_{(i)}$ (ici $1 \leq i \leq p-1$).*

Démonstration. La classe $c_i(\hat{T}_o)$ est obtenue par restriction de la i -ème classe de Chern du fibré tautologique \hat{T} sur $\mathbb{G}_{p,p}$. Cette dernière est un multiple non nul de $C_{(i)}^{\text{Gr}}$. Puisque $(i+1, 1^i)^- = (i)$, le corollaire 46 découle de la proposition 44.

Action des classes de Chern sur la cohomologie

Comme dans les deux parties précédentes, nous noterons \mathfrak{p}_L^+ l'intersection $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{l}(\lambda^-, \mu^-)$ et $E(G, L)$ le sous-espace de $\bigwedge \mathfrak{p}^+$ engendré par les translatés par K du sous-espace $\bigwedge \mathfrak{p}_L^+$.

Enfin, nous dirons qu'une partition symétrique ν s'inscrit antisymétriquement dans un diagramme gauche symétrique $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$ s'il existe une image de la partition ν^- ou de sa transposée $(\nu^-)^*$ dans le diagramme gauche $(\mu/\lambda)^+$ dont le sous-diagramme contenu dans $p_0 \times p_0$ est égale à ν_0^- ou $(\nu_0^-)^*$ pour une certaine partition symétrique $\nu_0 \subset p_0 \times p_0$.

La démonstration de la proposition 38 se traduit facilement dans le cas du groupe $O^*(2p)$ pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 47 *Soient λ , μ et ν trois partitions symétriques incluses dans $p \times p$ telles que (λ, μ) forme un couple compatible. Notons $L = L(\lambda^-, \mu^-)$. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $C_{\nu^-} \cdot V(\lambda^-, \mu^-) \neq 0$ dans $\bigwedge \mathfrak{p}$;
2. la partition ν s'inscrit antisymétriquement dans le diagramme gauche μ/λ ;
3. $V(\nu^-) \subset E(G, L)$.

De plus, les éléments $\{C_{\nu^-} \cdot v(\lambda^-) \otimes w(\mu^-)^*\}$, où ν^- décrit l'ensemble des parties négatives des partitions symétriques $\nu \subset p \times p$ qui s'inscrivent antisymétriquement dans μ/λ , sont linéairement indépendants.

Décomposition “à la Lefschetz”

Fixons maintenant un sous-groupe de congruence Γ dans G . Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques. Nous noterons $H^{\lambda^-, \mu^-}(S(\Gamma)) = H^{|\lambda^-| + |\mu^-|}(A(\lambda^-, \mu^-) : \Gamma)$ la $A(\lambda^-, \mu^-)$ -composante fortement primitive de la cohomologie de $S(\Gamma)$. La formule de Matsushima et la classification de Vogan-Zuckerman impliquent le théorème suivant.

Théorème 48 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G . Pour chaque couple d'entiers (i, j) avec $i + j \leq \frac{p(p-1)}{2}$, on a :*

$$H^{i,j}(S(\Gamma)) = \bigoplus_{\substack{(\lambda^-, \mu^-) \\ (\lambda, \mu) \text{ couple compatible} \\ \text{de partitions symétriques} \\ |\lambda^-| \leq i, |\mu^-| \leq j}} \bigoplus_{\substack{\nu_0^- \\ \nu_0 \subset p_0 \times p_0 \\ \text{symétrique} \\ \nu_i \subset b_i \times a_i \\ i = 1, \dots, m}} E_{\nu_0^-, \nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda^-, \mu^-}(S(\Gamma)),$$

où le diagramme gauche $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$ et chaque $E_{\nu_0^-, \nu_1, \dots, \nu_m}^{\lambda^-, \mu^-}(S(\Gamma))$ est isomorphe à $H^{\lambda^-, \mu^-}(S(\Gamma))$.

Là encore, cette décomposition est en général plus fine que celle induite par les classes de Chern. La démonstration du théorème 17 en remplaçant la proposition 11 par la proposition 47 implique immédiatement le théorème suivant.

Commençons par remarquer que l'orbite de $x_0 \in \mathbb{G}O_p$ sous l'action du groupe $O^*(2p)$ s'identifie à l'espace symétrique hermitien X_G . Soit Γ un sous-groupe de congruence de G . Le groupe $O^*(2p)$ agit sur $(\hat{T}_o)_{|X_G}$. En quotientant

par l'action de Γ sur $(\hat{T}_o)_{|X_G}$, on obtient un fibré sur $S(\Gamma)$ que nous noterons T_o .

D'après un théorème classique de Cartan, l'espace $H^*(\mathbb{G}O_p)$ peut être identifié avec l'espace des formes différentielles $O(2p)$ -invariantes. Soit ω une forme différentielle $O(2p)$ -invariante sur $\mathbb{G}O_p$ et soit $\bar{\omega}$ une forme différentielle $O^*(2p)$ -invariante sur X_G égale à ω au point x_0 . Puisque ω est, en particulier, Γ -invariante elle induit une forme (nécessairement fermée) sur $S(\Gamma)$ qui définit donc une classe de cohomologie dans $H^*(S(\Gamma))$. On a ainsi construit une application

$$\eta : H^*(\mathbb{G}O_p) \rightarrow H^*(S(\Gamma)). \quad (70)$$

Il est bien connu que η est injective. Enfin, la i -ème classe de Chern $c_i(T_o)$ du fibré T_o est égale à $(-1)^i \eta(c_i(\hat{T}_o))$.

Théorème 49 *Soit Γ un sous-groupe de congruence dans G et soit $\eta : H^*(\mathbb{G}O_p) \rightarrow H^*(S(\Gamma))$ l'application définie en (70). Fixons λ, μ et ν trois partitions symétriques incluses dans $p \times p$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors,*

1. *pour toute classe fortement primitive $s \in H^{\lambda^-} \cdot \mu^- (S(\Gamma))$, $\eta(C_{\nu^-}) \cdot s = 0$ si et seulement si la partition ν ne s'inscrit pas antisymétriquement dans le diagramme gauche μ/λ , et*
2. *si $s \in H^{\lambda^-} \cdot \mu^- (S(\Gamma))$ est une classe non nulle, les éléments $C_{\nu^-} \cdot s$, où ν^- décrit l'ensemble des parties négatives de partitions symétriques $\nu \subset p \times p$ qui s'inscrivent symétriquement dans le diagramme gauche μ/λ , sont linéairement indépendants.*

En spécialisant ce théorème au cas de la cohomologie holomorphe, on corrige très légèrement un théorème de Parthasarathy [20, Theorem 5.1].

Corollaire 50 (Parthasarathy) *Supposons $p \geq 4$. Soient $C_1, C_2, \dots, C_{p-1} \in H^*(S(\Gamma))$ les classes de Chern du fibré tautologique T_o au-dessus de $S(\Gamma)$. Pour $j = 3, 4, \dots, p$ notons*

$$Q_j = \{s \in H^{\frac{p(p-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2}, 0}(S(\Gamma)) : C_{j+1} \cdot s = C_{j+2} \cdot s = \dots = 0\}.$$

Pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ notons

$$Q'_i = \left\{ s \in H^{\frac{p(p-1)}{2} - i, 0}(S(\Gamma)) : (C_3 - C_1 \cdot C_2) \cdot s = 0 \right\}.$$

Alors,

$$H^{l,0}(S(\Gamma)) = \bigoplus_{3 \leq j \leq p} Q_j \oplus \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} Q'_i.$$

3.2 Restriction stable à une sous-variété de Shimura

Comme dans la première partie, nous pourrions classifier les différents types possibles de sous-variétés de Shimura. Nos méthodes n'apporteraient pas de résultats intéressants concernant l'injectivité mais en se restreignant à la cohomologie holomorphe le lecteur déduira facilement des méthodes de la première partie le théorème suivant qui renforce des résultats antérieurs de Clozel et Venkataramana.

Théorème 51 Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G . Alors, l'application

$$\text{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \rightarrow \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0H)$$

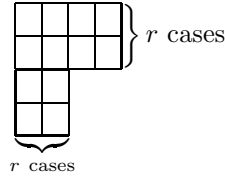
de restriction stable est identiquement **nulle** en restriction à la cohomologie holomorphe $H^{*,0}(Sh^0G)$.

Concluons cet article en remarquant que le sous-espace $H^{\lambda^-, \mu^-}(Sh^0G)$ apparaît dans la cohomologie holomorphe si et seulement si $\mu^- = (p-1, p-2, \dots, 1)$. On a alors deux cas possibles.

1. La partition $\mu = p \times p$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un entier r compris entre 0 et p tel que

$$\lambda = (\underbrace{p, \dots, p}_{r \text{ fois}}, \underbrace{r, \dots, r}_{p-r \text{ fois}})$$

de diagramme de Young :



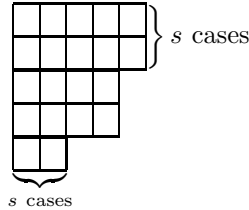
(Ici $p = 4$.)

Dans ce cas $H^{\lambda^-, \mu^-}(Sh^0G) \subset H^{rp - \frac{r(r+1)}{2}, 0}(Sh^0G)$.

2. La partition $\mu = (\underbrace{p, \dots, p}_{p-1 \text{ fois}}, p-1)$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un entier s compris entre 0 et $p-1$ tel que

$$\lambda = (\underbrace{p, \dots, p}_{s \text{ fois}}, \underbrace{p-1, \dots, p-1}_{p-s-1 \text{ fois}}, s)$$

de diagramme de Young :



(Ici $p = 5$.)

Dans ce cas $H^{\lambda^-, \mu^-}(Sh^0G) \subset H^{\frac{(p-1)(p-2)}{2} + s, 0}(Sh^0G)$.

Toute la cohomologie holomorphe de Sh^0G est obtenue ainsi et les seules redondances viennent du fait que

- si $r = p$ ou $p-1$ dans le premier cas on obtient le même sous-espace que si $s = p-1$ dans le deuxième cas, et
- si $r = p-2$ dans le premier cas on obtient le même sous-espace que si $s = p-2$ dans le deuxième cas.

References

- [1] G. ANDERSON. Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains. *Duke Math. J.*, 50:1137–1170, 1983.
- [2] J. ARTHUR. Unipotent automorphic representations: conjectures. In *Orbites unipotentes et représentations, II*, volume 171-172, pages 13–71. Astérisque, 1989.
- [3] A. BOREL and HARISH-CHANDRA. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 75:485–535, 1962.
- [4] A. BOREL and N. WALLACH. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. Princeton University Press, 1980.
- [5] S. S. CHERN. On a generalization of Kaehler geometry. In *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 103–121. Princeton University Press, 1957.
- [6] L. CLOZEL. On the cohomology of Kottwitz’s arithmetic varieties. *Duke Math. J.*, 72:757–795, 1993.
- [7] L. CLOZEL and T. N. VENKATARAMANA. Restriction of the holomorphic cohomology of a Shimura variety to a smaller Shimura variety. *Duke Math. J.*, 95:51–106, 1998.
- [8] P. DELIGNE. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71)*, volume 244, pages 123–165. Lecture Notes in Math., 1971.
- [9] W. FULTON. *Young tableaux*. Cambridge University Press, 1997.
- [10] I. M. GELFAND M. I. GRAEV and I. I. PYATETSKII-SHAPIRO. *Representation theory and automorphic functions*. Academic Press, Inc., 1969.
- [11] M. HARRIS and J. S. LI. A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties. *J. Algebraic Geometry*, 7:77–122, 1998.
- [12] R. HOTTA and N. R. WALLACH. On Matsushima’s formula for the Betti numbers of a locally symmetric space. *Osaka J. Math.*, 12:419–431, 1975.
- [13] B. KOSTANT. Lie algebra cohomology and generalised Schubert cells. *Ann. of Math.*, 77, 1963.
- [14] S. KUMARESAN. The canonical K -types of irreducible (\mathfrak{g}, K) - modules with non-zero cohomology. *Invent Math.*, 59:1–11, 1980.
- [15] J.-S. LI. Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients. *J. Reine Angew. Math.*, 428:177–217, 1992.
- [16] L. MANIVEL. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*. Cours Spécialisés, 3. Société Mathématique de France, 1998.
- [17] Y. MATSUSHIMA. A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1:99–109, 1967.
- [18] T. ODA. A note on the Albanese of an arithmetic quotient of the complex hyperball. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math.*, 28:481–486, 1981.
- [19] R. PARTHASARATHY. Criteria for the unitarisability of some highest weight modules. *Proc. Indian Acad. Sci.*, 89:1–24, 1980.
- [20] R. PARTHASARATHY. Holomorphic forms in $\Gamma \backslash G/K$ and Chern classes. *Topology*, 21:157–178, 1982.
- [21] V. PLATONOV and A. RAPINCHUK. *Algebraic groups and number theory*. Academic Press, 1994.
- [22] J. ROHLFS. Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology. *J. Reine Angew. Math.*, 479:149–182, 1996.
- [23] T. N. VENKATARAMANA. Abelianness of Mumford-Tate groups associated to some unitary groups. *Compositio Math.*, 122:223–242, 2000.
- [24] T. N. VENKATARAMANA. Cohomology of compact locally symmetric spaces. *Compositio Math.*, 125:221–253, 2001.
- [25] T. N. VENKATARAMANA. Some remarks on cycle classes on Shimura varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 16:309–322, 2001.

- [26] T. N. VENKATARAMANA. On cycles on compact locally symmetric varieties. *Monatsh. Math.*, 135:221–244, 2002.
- [27] D. VOGAN and G. ZUCKERMAN. Unitary representations with cohomology. *Compositio Math.*, 53:51–90, 1984.
- [28] A. V. ZELEVINSKY. A generalization of the Littlewood-Richardson rule and the Robinson-Schensted-Knuth correspondence. *J. of Algebra*, 69:82–94, 1981.

Unité Mixte de Recherche 8628 du CNRS,
 Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425,
 Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France
adresse électronique : `Nicolas.Bergeron@math.u-psud.fr`